

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ЗАДАННЫЙ КОНТУР ИЗ ЧЕТЫРЕХ ЛИНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Болотов В.П., Рогачев С.И., Роньшин Ю.И.

Предполагается, что контур (рис. 1) задается четырьмя параметрическими линиями: $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{v}_1(t)$, где t изменяется от 0 до 1.

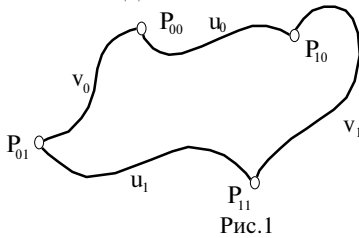


Рис.1

Линии u_0 и u_1 называются образующими, а линии v_0 и v_1 - направляющими. Предполагается также, что линии пересекаются в следующих точках:

$$\mathbf{p}_{00} = \mathbf{u}_0(0) = \mathbf{v}_0(0), \quad \mathbf{p}_{10} = \mathbf{u}_0(1) = \mathbf{v}_1(0),$$

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{u}_1(0) = \mathbf{v}_0(1), \quad \mathbf{p}_{11} = \mathbf{u}_1(1) = \mathbf{v}_1(1).$$

Необходимо найти такое параметрическое описание поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, где u и v изменяются от 0 до 1, что

$$\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{u}_0(u), \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(u, 1) = \mathbf{u}_1(u), \quad (2)$$

$$\mathbf{r}(0, v) = \mathbf{v}_0(v), \quad (3)$$

$$\mathbf{r}(1, v) = \mathbf{v}_1(v). \quad (4)$$

Поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ представляется в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{v}_0(v) - \mathbf{p}_{00} + \mathbf{u}_0(u) + \mathbf{L}(v)[\mathbf{u}_1(u) - \mathbf{p}_{01} - \mathbf{u}_0(u) + \mathbf{p}_{00}], \quad (5)$$

где $\mathbf{L}(v)$ - линейный оператор, действующий на точки трехмерного пространства.

Уравнение (5) для данного представления является тождеством. На оператор $\mathbf{L}(v)$ наложены ограничения :

$$\mathbf{L}(0) = \hat{\mathbf{0}}, \quad (6)$$

$$\mathbf{L}(1) = \hat{\mathbf{1}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_1(v) = \mathbf{v}_0(v) - \mathbf{p}_{00} + \mathbf{p}_{10} + \mathbf{L}(v)[\mathbf{D}_{11}], \quad (8)$$

где

$\hat{\mathbf{0}}$ - нулевой оператор,

$\hat{\mathbf{1}}$ - тождественный оператор, $\mathbf{d}_{11} = \mathbf{p}_{11} -$

$\mathbf{p}_{01} - \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{00}$.

Для удобства введем d -переменные, которые определим следующим образом:

$$\mathbf{d}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{v}_0(v) - \mathbf{u}_0(u) + \mathbf{p}_{00},$$

$$\mathbf{d}(u, 1) = \mathbf{u}_1(u) - \mathbf{p}_{01} - \mathbf{u}_0(u) + \mathbf{p}_{00},$$

$$\mathbf{d}(1, v) = \mathbf{v}_1(v) - \mathbf{v}_0(v) - \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{00}.$$

Уравнение поверхности (5) тогда переходит в

$$\mathbf{d}(u, v) = \mathbf{L}(v)[\mathbf{d}(u, 1)], \quad (9)$$

а условия (6) - (8) в условия:

$$\mathbf{L}(0) = \hat{\mathbf{0}}, \quad (10)$$

$$\mathbf{L}(1) = \hat{\mathbf{1}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{d}(1, v) = \mathbf{L}(v)[\mathbf{d}_{11}]. \quad (12)$$

Условия (10)-(12) позволяют определить элементы матрицы, представляющей оператор $\mathbf{L}(v)$ в некоторой системе координат. Следует отметить, что в случае $\mathbf{d}_{11} = \mathbf{0}$ оператор $\mathbf{L}(v)$ существует только при $\mathbf{d}(1, v) = \mathbf{0}$, что эквивалентно $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$. Случай $\mathbf{d}_{11} = \mathbf{0}$ геометрически представляется тем, что точки \mathbf{p}_{00} , \mathbf{p}_{10} , \mathbf{p}_{11} , \mathbf{p}_{01} образуют параллелограмм. В дальнейшем предполагается, что \mathbf{d}_{11} не равен 0.

Для заданного параметра v матрица $\mathbf{L}(v)$ в некоторой системе координат представляется в виде

$$\begin{pmatrix} l_{11}(v) & l_{12}(v) & l_{13}(v) \\ l_{21}(v) & l_{22}(v) & l_{23}(v) \\ l_{31}(v) & l_{32}(v) & l_{33}(v) \end{pmatrix},$$

а уравнение (12) определяет неоднородную систему из трех линейных уравнений относительно девяти неизвестных - элементов матрицы $\mathbf{L}(v)$. Эту систему можно решить, используя методы линейной ал-

гебры, причем шесть элементов матрицы $\mathbf{L}(v)$ задаются произвольным образом. Таким образом, имеются шесть степеней свободы для оператора $\mathbf{L}(v)$, которые можно использовать для управления формой поверхности либо для обеспечения гладкого сшивания данной поверхности по направляющим. В этом случае к уравнению (12) добавляются два векторных уравнения относительно произвольно заданных функций распределения производных по u и v на образующих.

При плоско-параллельном случае (предполагается, что плоские линии u_0 и u_1 лежат в параллельных плоскостях, а векторы $\mathbf{v}_1(t)-\mathbf{v}_0(t)$ параллельны этим плоскостям) решение ищется в виде суммы частного решения и общего решения однородной системы:

$$\mathbf{L}(v) = \mathbf{Lc}(v) + \mathbf{Lo}(v),$$

где $\mathbf{Lc}(v)$ - частное решение, $\mathbf{Lo}(v)$ - общее решение однородной системы $\mathbf{L}(v)[\mathbf{d}_{11}] = 0$.

В качестве частного решения выбирается произведение преобразования подобия на преобразование поворота:

$$\mathbf{Lc}(v) = \frac{|\mathbf{d}(1,v)|}{|\mathbf{d}_{11}|} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha(v) & -\sin \alpha(v) \\ \sin \alpha(v) & \cos \alpha(v) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где α - угол между $\mathbf{d}(1,v)$ и \mathbf{d}_{11} .

Общее решение однородной системы можно представить в виде

$$\mathbf{Lo}(v) = \begin{pmatrix} -p(v) \sin \varphi & p(v) \cos \varphi \\ -q(v) \sin \varphi & q(v) \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $p(v)$ и $q(v)$ - произвольные функции от v , φ - угол вектора \mathbf{d}_{11} относительно оси Y .

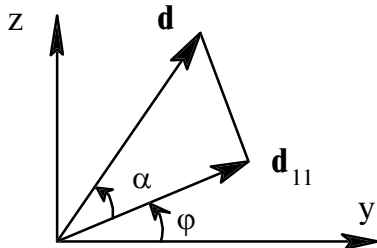


Рис. 2

Из формулы (13) и определения \mathbf{d} -переменных вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Lc}(0) &= \hat{0}, \\ \mathbf{Lc}(1) &= \hat{1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (14) следует, что для удовлетворения условий (6) и (7) $p(v)$ и $q(v)$ должны быть произвольными финитными функциями, т.е. удовлетворять условиям $p(0)=q(0)=p(1)=q(1)=0$.

Утверждение 1. Уравнение (5) обобщенно инвариантно к преобразованию

поворота относительно оси x в том смысле, что класс поверхностей, полученных этим методом в некоторой системе координат, совпадает с классом поверхностей, полученных в любой другой повернутой системе координат, или иначе: любым параметрам (p,q) поверхности в некоторой системе координат (с.к.) соответствуют параметры (p',q') в другой (повернутой) с.к., которые дают ту же поверхность. Причем, если первый базис переводится во второй оператором U_α , где α - угол поворота, то

$$\frac{p'}{q'} = U_a \frac{p}{q}.$$

Оператор \mathbf{Lo} рассматривается в системе координат такой, что $\varphi=0$ (т.е. \mathbf{d}_{11} лежит на оси y)

$$\mathbf{Lo} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

В системе координат $z1$ имеем

$$\mathbf{L'o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p & q \end{pmatrix}.$$

Действие этого оператора на вектор плоскости - в проектировании вектора на прямую с углом наклона $\alpha = \arctan q/p$ вдоль оси y и последующем растяжении с коэффициентом q (рис. 3).

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow r_2 \rightarrow r_3, \\ \alpha &= \arctan q/p, \\ r_2^2 &= r_1^2, \\ \frac{|r_3|}{|r_2|} &= q. \end{aligned}$$

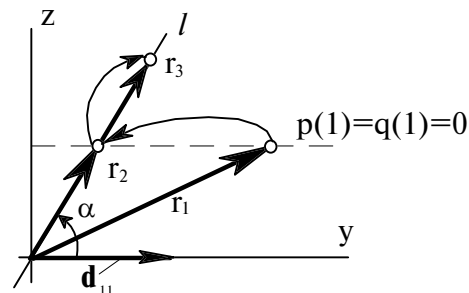


Рис. 3

Рассмотрим геометрическое представление метода построения поверхности для плоско-параллельного случая. Пусть поверхность Π_1 образована плоско-параллельным движением образующей $\mathbf{r}(u,0)$ по направляющей $\mathbf{r}(0,v)$, а поверхность Π_2 - таким же движением обра-

зующей $r(u,1)$. Рассмотрим поле векторов, соединяющих точки на П1 и на П2 с одинаковым u и v . Эти вектора и есть $d(u,v)$ - вектора в уравнении (9). В некотором сечении $v=v_0$ они образуют векторное поле на сдвинутой кривой $r(u,0)$ (рис.4).

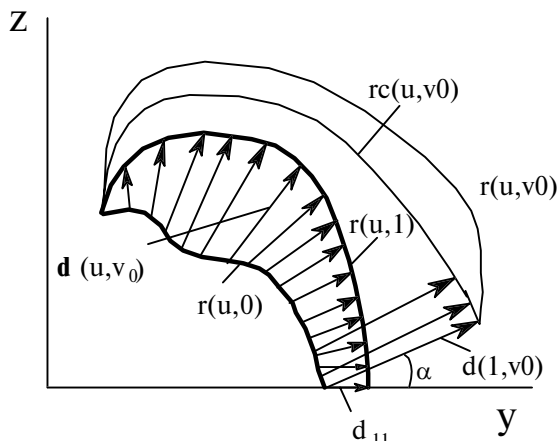


Рис. 4

В этом же сечении (плоскости) лежит вектор $d(1,v_0)$. Оператор $L(v_0)$ переводит вектор d_{11} в вектор $d(1,v_0)$. Причем это

преобразование осуществляется оператором $Lc(v_0)$ путем поворота вектора d_{11} на угол α и растяжения его до нормы $d(1,v_0)$. Применение $Lc(v_0)$ ко всем векторам поля и сложение их с $r(u,0)$ даст требуемую кривую (сечение искомой поверхности) $rc(u,v_0)$. Оператор $Lo(v_0)$ преобразует поле $d(u,v_0)$ в поле добавочных векторов $do(u,v)$. Добавочное поле, сложенное с кривой $rc(u,v_0)$, даст другую кривую, также удовлетворяющую исходным условиям. Таким образом, требуемую кривую, а следовательно, и поверхность, можно варьировать в зависимости от параметров оператора $L(v_0)$ - $p(v)$ и $q(v)$.

В системе "Вектор" описанный метод имеет название "Диагональ-ключ" и реализован в качестве базового варианта. Достоинство метода состоит в том, что он позволяет моделировать поверхности с использованием свойств растяжения и сдвига внутри заданного контура.