ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ЗАДАННЫЙ КОНТУР ИЗ ЧЕТЫРЕХ ЛИНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Болотов В.П., Рогачев С.И., Роньшин Ю.И.

Предполагается, что контур (рис. 1) задается четырьмя параметрическими линиями: $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{v}_0(t)$, $\mathbf{v}_1(t)$, где t изменяется от 0 до 1.

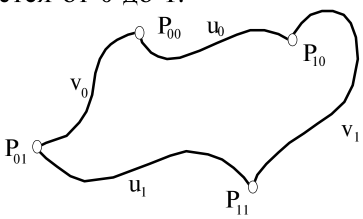

Рис.1

Линии u_0 и u_1 называются образующими, а линии v_0 и v_1 - направляющими. Предполагается также, что линии пересекаются в следующих точках:

$\mathbf{p}_{00}=\mathbf{u}_0(0)=\mathbf{v}_0(0)$, $\mathbf{p}_{10}=\mathbf{u}_0(1)=\mathbf{v}_1(0)$, $\mathbf{p}_{01}=\mathbf{u}_1(0)=\mathbf{v}_0(1)$, $\mathbf{p}_{11}=\mathbf{u}_1(1)=\mathbf{v}_1(1)$.

Небходимо найти такое параметрическое описание поверхности $\mathbf{r}(u,v)$, где u и v изменяются от 0 до 1, что

$$\mathbf{r}(u,0)=\mathbf{u}_0(u), \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(u,1)=\mathbf{u}_1(u), \quad (2)$$

$$\mathbf{r}(0,v)=\mathbf{v}_0(v), \quad (3)$$

$$\mathbf{r}(1,v)=\mathbf{v}_1(v). \quad (4)$$

Поверхность $\mathbf{r}(u,v)$ представляется в виде

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{v}_0(v)-\mathbf{p}_{00}+\mathbf{u}_0(u)+\mathbf{L}(v)[\mathbf{u}_1(u)-\mathbf{p}_{01}-\mathbf{u}_0(u)+\mathbf{p}_{00}], \quad (5)$$

где $\mathbf{L}(v)$ - линейный оператор, действующий на точки трехмерного пространства.

Уравнение (5) для данного представления является тождеством. На оператор $\mathbf{L}(v)$ наложены ограничения :

$$\mathbf{L}(0)=\hat{}\mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\mathbf{L}(1)=\hat{}\mathbf{1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_1(v)=\mathbf{v}_0(v)-\mathbf{P}_{00}+\mathbf{P}_{10}+\mathbf{L}(v)[\mathbf{D}_{11}\ ], \quad (8)$$

где

^**0** - нулевой оператор,

^1 - тождественный оператор, $\mathbf{d}_{11}=\mathbf{p}_{11}-\mathbf{p}_{01}-\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{00}$.

Для удобства введем d-переменные, которые определим следующим образом:

$$\mathbf{d}(u,v)=\mathbf{r}(u,v)-\mathbf{v}_0(v)-\mathbf{u}_0(u)+\mathbf{p}_{00},$$

$$\mathbf{d}(u,1)=\mathbf{u}_1(u)-\mathbf{p}_{01}-\mathbf{u}_0(u)+\mathbf{p}_{00},$$

$$\mathbf{d}(1,v)=\mathbf{v}_1(v)-\mathbf{v}_0(v)-\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{00}.$$

Уравнение поверхности (5) тогда переходит в

$$\mathbf{d}(u,v)=\mathbf{L}(v)[\mathbf{d}(u,1)\ ], \quad (9)$$

а условия (6) - (8) в условия:

$$\mathbf{L}(0)=\hat{}\mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\mathbf{L}(1)=\hat{}\mathbf{1}, \quad (11)$$

$$\mathbf{d}(1,v)=\mathbf{L}(v)\ [\mathbf{d}_{11}]. \quad (12)$$

Условия (10)-(12) позволяют определить элементы матрицы, представляющей оператор $\mathbf{L}(v)$ в некоторой системе координат. Следует отметить, что в случае $\mathbf{d}_{11}=0$ оператор $\mathbf{L}(v)$ существует только при $\mathbf{d}(1,v)=0$, что эквивалентно $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_0$. Случай $\mathbf{d}_{11}=0$ геометрически представляется тем, что точки $\mathbf{p}_{00}$, $\mathbf{p}_{10}$, $\mathbf{p}_{11}$, $\mathbf{p}_{01}$ образуют параллелограмм. В дальнейшем предполагается, что $\mathbf{d}_{11}$ не равен 0.

Для заданного параметра v матрица $\mathbf{L}(v)$ в некоторой системе координат представляется в виде

$$\begin{array}{ccc} l_{11}(v) & l_{12}(v) & l_{13}(v) \\ l_{21}(v) & l_{22}(v) & l_{23}(v) \\ l_{31}(v) & l_{32}(v) & l_{33}(v) \end{array},$$

а уравнение (12) определяет неоднородную систему из трех линейных уравнений относительно девяти неизвестных - элементов матрицы $\mathbf{L}(v)$. Эту систему можно решить, используя методы линейной алгебры, причем шесть элементов матрицы $\mathbf{L}(v)$ задаются произвольным образом. Таким образом, имеются шесть степеней свободы для оператора $\mathbf{L}(v)$, которые можно использовать для управления формой поверхности либо для обеспечения гладкого сшивания данной поверхности по направляющим. В этом случае к уравнению (12) добавляются два векторных уравнения относительно произвольно заданных функций распределения производных по u на образующих.

При плоско-параллельном случае (предполагается, что плоские линии u_0 и u_1 лежат в параллельных плоскостях, а векторы $\mathbf{v}_1(t)$-$\mathbf{v}_0(t)$ параллельны этим плоскостям) решение ищется в виде суммы частного решения и общего решения однородной системы:

$\mathbf{L}(v)=\mathbf{Lc}(v)+\mathbf{Lo}(v)$,

где $\mathbf{Lc}(v)$ - частное решение, $\mathbf{Lo}(\mathbf{v})$ - общее решение однородной системы $\mathbf{L}(v)[\mathbf{d}_{11}]=0$.

В качестве частного решения выбирается произведение преобразования подобия на преобразование поворота:

$$\mathrm{Lc}(v) = \frac{|\mathrm{d}(1,v)|}{|\mathrm{d}_{11}|} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha(v) & -\sin\alpha(v) \\ \sin\alpha(v) & \cos\alpha(v) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где α - угол между $\mathbf{d}(1,v)$ и $\mathbf{d}_{11}$.

Общее решение однородной системы можно представить в виде

$$\mathrm{L_o}(v) = \begin{pmatrix} -p(v)\sin\varphi & p(v)\cos\varphi \\ -q(v)\sin\varphi & q(v)\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$p(v)$ и $q(v)$ - произвольные функции от v,

φ - угол вектора $\mathbf{d}_{11}$ относительно оси Y.

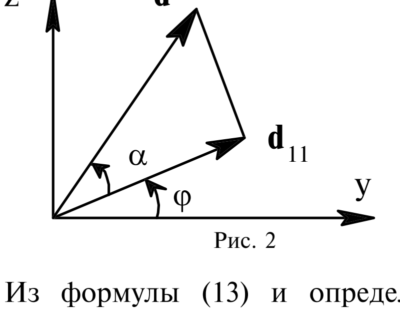

Рис. 2

Из формулы (13) и определения ***d***-переменных вытекает, что

$\mathbf{L}c(0)$=^**0**,

$\mathbf{L}c(1)$=^**1**.

Отсюда и из формулы (14) следует, что для удовлетворения условий (6) и (7) $p(v)$ и $q(v)$ должны быть произвольными финитными функциями, т.е. удовлетворять условиям $p(0)=q(0)=p(1)=q(1)=0$.

Утверждение 1. Уравнение (5) обобщенно инвариантно к преобразованию поворота относительно оси x в том смысле, что класс поверхностей, полученных этим методом в некоторой системе координат, совпадает с классом поверхностей, полученных в любой другой повернутой системе координат, или иначе: любым параметрам (p,q) поверхности в некоторой системе координат (с.к.) соответствуют параметры (p',q') в другой (повернутой) с.к., которые дают ту же поверхность. Причем, если первый базис переводится во второй оператором U_α, где α - угол поворота, то

$$\frac{p'}{q'} = U_a \frac{p}{q}.$$

Оператор $\mathbf{Lo}$ рассматривается в системе координат такой, что φ=0 (т.е. $\mathbf{d}_{11}$ лежит на оси y)

$$\mathbf{Lo} = \begin{matrix} 0 & p \\ 0 & q \end{matrix}.$$

В системе координат zl имеем

$$\mathbf{L'o} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ -p & q \end{matrix}.$$

Действие этого оператора на вектор плоскости - в проектировании вектора на прямую с углом наклона $\alpha = \arctan q / p$ вдоль оси y и последующем растяжении с коэффициентом q (рис. 3).

$r_1 \to r_2 \to r_3$,

$\alpha = \arctan q / p$,

$r_2^2 = r_1^2$,

$$\frac{|r_3|}{|r_2|} = q.$$

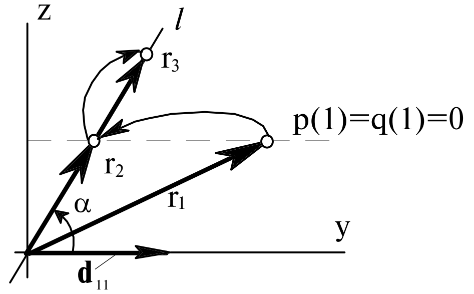

Рис. 3

Рассмотрим геометрическое представление метода построения поверхности для плоско-параллельного случая. Пусть поверхность П1 образована плоско-параллельным движением образующей $\mathbf{r}(u,0)$ по направляющей $\mathbf{r}(0,v)$, а поверхность П2 - таким же движением образующей $\mathbf{r}(u,1)$. Рассмотрим поле векторов, соединяющих точки на П1 и на П2 с одинаковым u и v. Эти вектора и есть $\mathbf{d}(u,v)$ - вектора в уравнении (9). В некотором сечении $v=v0$ они образуют векторное поле на сдвинутой кривой $\mathbf{r}(u,0)$ (рис.4).

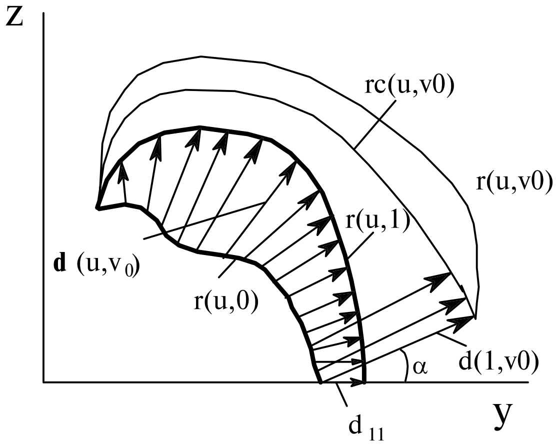

Рис. 4

В этом же сечении (плоскости) лежит вектор $\mathbf{d}(1,v0)$. Оператор $\mathbf{L}(v0)$ переводит вектор $\mathbf{d}11$ в вектор $\mathbf{d}(1,v0)$. Причем это преобразование осуществляется оператором $\mathbf{Lc}(v0)$ путем поворота вектора $\mathbf{d}11$ на угол α и растяжения его до нормы $\mathbf{d}(1,v0)$. Применение $\mathbf{Lc}(v0)$ ко всем векторам поля и сложение их с $\mathbf{r}(u,0)$ даст требуемую кривую (сечение искомой поверхности) $\mathbf{r}c(u,v0)$. Оператор $\mathbf{Lo}(v0)$ преобразует поле $\mathbf{d}(u,v0)$ в поле добавочных векторов $\mathbf{do}(u,v)$. Добавочное поле, сложенное с кривой $\mathbf{r}c(u,v0)$, даст другую кривую, также удовлетворяющую исходным условиям. Таким образом, требуемую кривую, а следовательно, и поверхность, можно варьировать в зависимости от параметров оператора $\mathbf{L}(v0)$ - $p(v)$ и $q(v)$.

В системе "Вектор" описанный метод имеет название "Диагональ-ключ" и реализован в качестве базового варианта. Достоинство метода состоит в том, что он позволяет моделировать поверхности с использованием свойств растяжения и сдвига внутри заданного контура.