

# **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Болотов В.П., Москаленко А.Д., Филиппов П.В.

Графические и графоаналитические методы решения задач линейного программирования имеют следующие достоинства:

- наглядность представления геометрической сущности задачи и процедуры ее анализа;

- простота отыскания и наглядность представления допустимых решений, а также исключения "лишних" неравенств;

- нахождение вершины оптимального решения методом преобразования гиперплоскости линейной формы в проецирующее положение, что значительно сокращает объем вычислений по сравнению с численными методами. Задача линейного программирования формируется следующим образом: найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые обращают в минимум (максимум) функцию

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_0 \quad (1)$$

и удовлетворяют условиям

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2)$$

Областью решений системы ограничений - неравенств является выпуклое многогранное множество - гипергранник ограничений. Этот гипергранник ограничен гиперплоскостями, уравнения которых получают из неравенств системы ограничений.

Линейная форма (1) определяет в том же пространстве семейство параллельных гиперплоскостей.

Если представить, что одна из гиперплоскостей семейства проходит вне гипергранника решений, то вершина, содержащая оптимальное решение, является наименее (наиболее) удаленной от гиперплоскости линейной формы. Геометрически процесс отыскания оптимального решения можно рассматривать как определение наибольшего или наименьшего расстояния от вершин гипергранника решений до некоторой заданной гиперплоскости линейной формы.

Такая геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования положена в основу графического метода ее решения. Покажем методику графического решения на примере задачи линейного программирования для систем ограничений с четырьмя неизвестными.

Требуется найти максимум линейной формы

$$F = 6x_1 + 5x_3 + 200 \quad (3)$$

при ограничениях:

$$4x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 280,$$

$$10x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 300 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Решение графическим методом этой задачи заключается в следующем:

1) строится гипергранник решений данной системы ограничений;

2) вне гипергранника решений проводится гиперплоскость линейной формы задачи;

3) определяется вершина оптимального решения как вершина гипергранника, наименее или наиболее удаленная от проведенной гиперплоскости;

4) по чертежу определяются координаты вершины оптимального решения, значения которых и являются искомыми значениями неизвестных;

5) значения координат подставляются в уравнение линейной формы и определяется искомое максимальное значение.

Для построения гипергранника решений уравнения системы (4) почленно делятся на свободный член. В результате получаем уравнения в отрезках рассматриваемых гиперплоскостей на координатных осях  $Ox_1, Ox_2, Ox_3, Ox_4$

$$\frac{x_1}{70} + \frac{x_2}{40} + \frac{x_3}{35} + \frac{x_4}{28} = 1, \quad (5)$$

$$\frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{50} + \frac{x_3}{50} + \frac{x_4}{60} = 1. \quad (6)$$

На рис. 1 в косоугольной изометрической и ортогональных проекциях построены следы гиперплоскостей  $P$  и  $Q$ .

В результате пересечений координатных гиперплоскостей и гиперплоскостей  $P$  и  $Q$  образовался выпуклый гипергранник решений. Контур этого гипергранника на чертежах даны утолщенными ли-

ниями. Вершинами гипергранника являются точки  $O, Q_x, K, H, P_{x_2}, P_{x_4}, P_{x_3}, V$ .

На рис. 1 построена также линейная форма (4), соответствующая значению  $F=500$ . Стрелками показано направление ее перемещения, при котором возрастает линейная форма.

Вершиной оптимального решения является вершина гипергранника, наименее удаленная от гиперплоскости  $T$ . Такой вершиной является вершина  $V$ . Расстояние от нее до гиперплоскости  $T$  выражается отрезком  $V_1S_{13}$ , который является расстоянием от точки до фронтально-проецирующей гиперплоскости и проецируется на фронтальную плоскость без искажения.

Координаты вершины  $V$ , снятые с чертежей, имеют значения  $x_1=13.5; x_2=0; x_3=28.5; x_4=0$ . Подставив значения этих координат в уравнение (4.4) линейной формы, получим ее максимальное значение  $F_{max}=423.5$ .

В рассмотренном примере линейная форма представлялась графически гиперплоскостью частного положения, и расстояние от вершины гипергранника решения до этой гиперплоскости получено непосредственно из чертежей.

В общем случае гиперплоскость линейной формы занимает произвольное положение относительно координатных плоскостей, и для решения задачи графическим способом необходимо преобразовать эту гиперплоскость в гиперплоскость частного положения, что, как показали исследования, не вызывает трудностей при использовании преобразований в виде замены плоскостей проекций.

Одновременно с преобразованием гиперплоскости необходимо соответственно преобразовать и все вершины гипергранника решений.

В графическом способе решения сложность составляет определение вершин гипергранника ограничений из-за их большого количества. Использование математических методов для определения количества и координат вершин позволяет снизить размерность системы ограничений. Отыскание же вершины оптимальных решений следует осуществлять графическим способом.

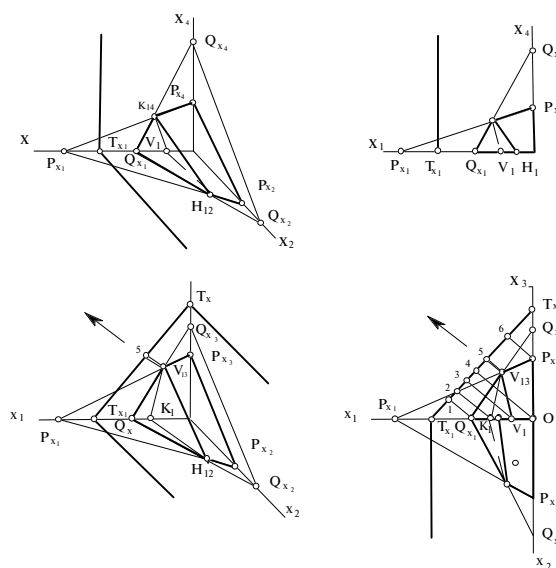


Рис.1

**Пример.** На Магаданском направлении необходимо перевезти следующие виды груза: А - транспортная техника; Б - контейнеры, В - генгруз в количествах, верхние пределы которых указаны в таблице. Каждое из выделенных для этих перевозок трех судов может принять одновременно определенное количество каждого груза, указанное в таблице. Требуется составить такой план работы судов (определить количество рейсов каждого судна), который обеспечивает перевозку грузов с наименьшими эксплуатационными расходами.

Для построения геометрической модели планируем для 1-го судна -  $x$  рейсов, для 2-го судна -  $y$  рейсов, а для 3-го судна -  $z$  рейсов. Тогда суммарные расходы судов будут равны:

$$Q = 20x + 15y + 10z \quad (7)$$

при следующих ограничениях

$$12x + 6y + 10z = 60,$$

$$5x + 10y + 8z = 40,$$

$$3x + 5y + 10z = 30. \quad (8)$$

Ограничения определяют то количество груза каждого вида, которое могут перевезти все суда за искомое количество рейсов:  $x, y$  и  $z$ .

Графическое решение задачи по предложенной выше методике показано на рис. 2.

Таблица

Виды грузов	Количество грузов, которое необходимо перевезти, тыс. т	Количество грузов, перевозимое судном за один рейс, тыс. т		
		на 1-м судне	на 2-м судне	на 3-м судне
А	60	12	6	10
Б	40	5	10	8
В	30	3	5	10
Эксплуатационные расходы за рейс, тыс. т		20	15	10

Рассмотрим решение данной задачи в расчетно-графической среде системы "Вектор". Наиболее сложным этапом решения является задание области ограничений. Модуль Vec\_Opt системы "Вектор" предоставляет возможность формирования трехмерной фигуры с помощью операций задания первой грани (косая плоскость по 4 точкам), задания второй грани (косая плоскость по 4 точкам) и операции "Визуализация трехмерного объекта на трехмерной сетке 00 x 00 x 00". При этом формируется трехмерный массив точек трехмерного образа. Если задать сетку 2x2x2, то изображаются только линии ребер тела.

На полученной области ограничений необходимо построить целевую функцию  $Q(x,y,z)$ , которая представляет собой трехмерную линейную фигуру (гиперплоскость) в 4-мерном пространстве. Модуль Vec\_Opt позволяет работать с фигурами 4-мерного пространства. Выполняются все традиционные операции отображения, преобразования и расчета подобно тому, как это производилось для трехмерного пространства, с отличием лишь в том, что увеличивается число ортогональных проекций, добавляются ортогональные трехмерные проекции и т. д.

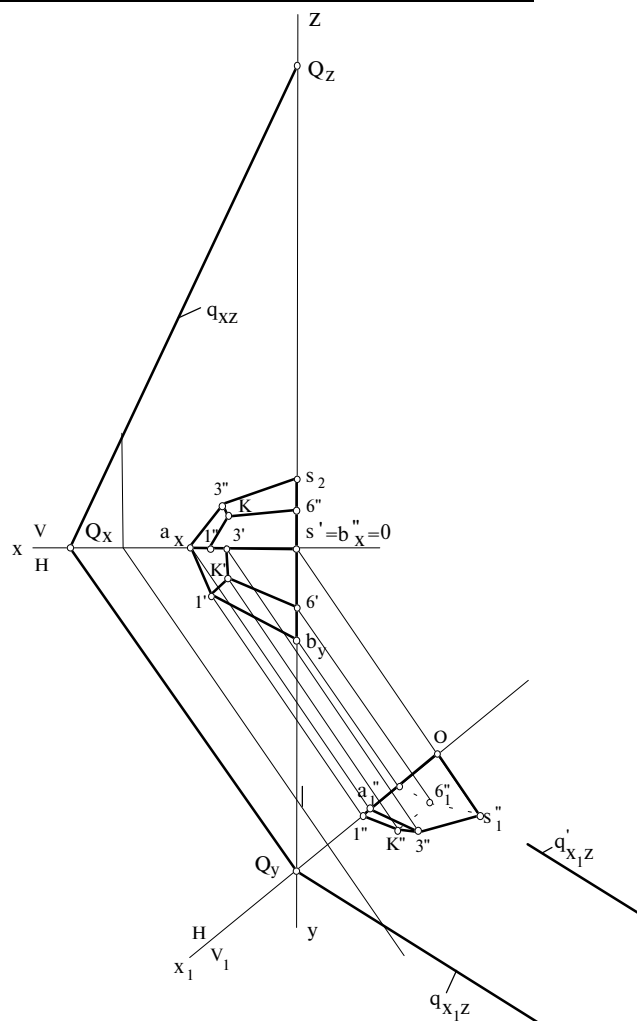


Рис.2

На полученной области ограничений необходимо построить целевую функцию  $Q(x,y,z)$ , которая представляет собой трехмерную линейную фигуру (гиперплоскость) в 4-мерном пространстве. Модуль Vec\_Opt позволяет работать с фигурами 4-мерного пространства. Выполняются все традиционные операции отображения, преобразования и расчета подобно тому, как это производилось для трехмерного пространства, с отличием лишь в том, что увеличивается число ортогональных проекций, добавляются ортогональные трехмерные проекции и т. д.

На рис. 3 показаны различные проекции целевой функции. При этом проекции целевой функции на координатные подпространства  $x_{1z}$  полностью совпадают с проекциями области ограничений. На проекции  $x_1t$  (направление целевой функции совпадает с осью  $t$ ) для линейной функции визуально сразу определяются минимум и максимум по той или иной вершине. В состоянии "Расчет" эти значения автоматически заносятся в регистры r191 и r192 для дальнейшей работы с ними. Следует заметить, что для нахождения экстремума трехмерной целевой функции не обязательно отображать

ее в 4-мерном пространстве. Известно (и из чертежа на проекции  $x'$  понятно), что оптимальное решение сводится к поиску ближайшей или наиболее удаленной от плоскости сечения целевой функции вершины многогранника. Поэтому, если целевой функции придать какое-либо значение ( $f=\text{const}$  или, тоже самое,  $Q=\text{const}$ ), то это сечение является двумерной плоскостью в пространстве  $x, y, z$ . Далее методами начертательной геометрии данную плоскость можно преобразовать (рис. 3) в проецирующее положение, эти же преобразования выполнить и для области ограничений. Ближайшая и самая удаленная вершины позволяют найти наибольшее или наименьшее значение

целевой функции. В модуле *Vec\_Opt* описанные преобразования можно выполнить по-другому: направление оси  $z$  изображения необходимо задать по вектору следа (или прямой уровня - горизонтали) плоскости. В этом случае данная плоскость спроецируется на экран дисплея в прямую (вид на плоскость с ее "торца"), по этому же направлению изобразится и фигура ограничений.

Таким образом, имеем наглядное изображение области ограничений (ее вершин) и плоскости-среза целевой функции (рис. 3). Данный прием полезен в том случае, когда отсутствуют возможности 4-мерного моделирования.

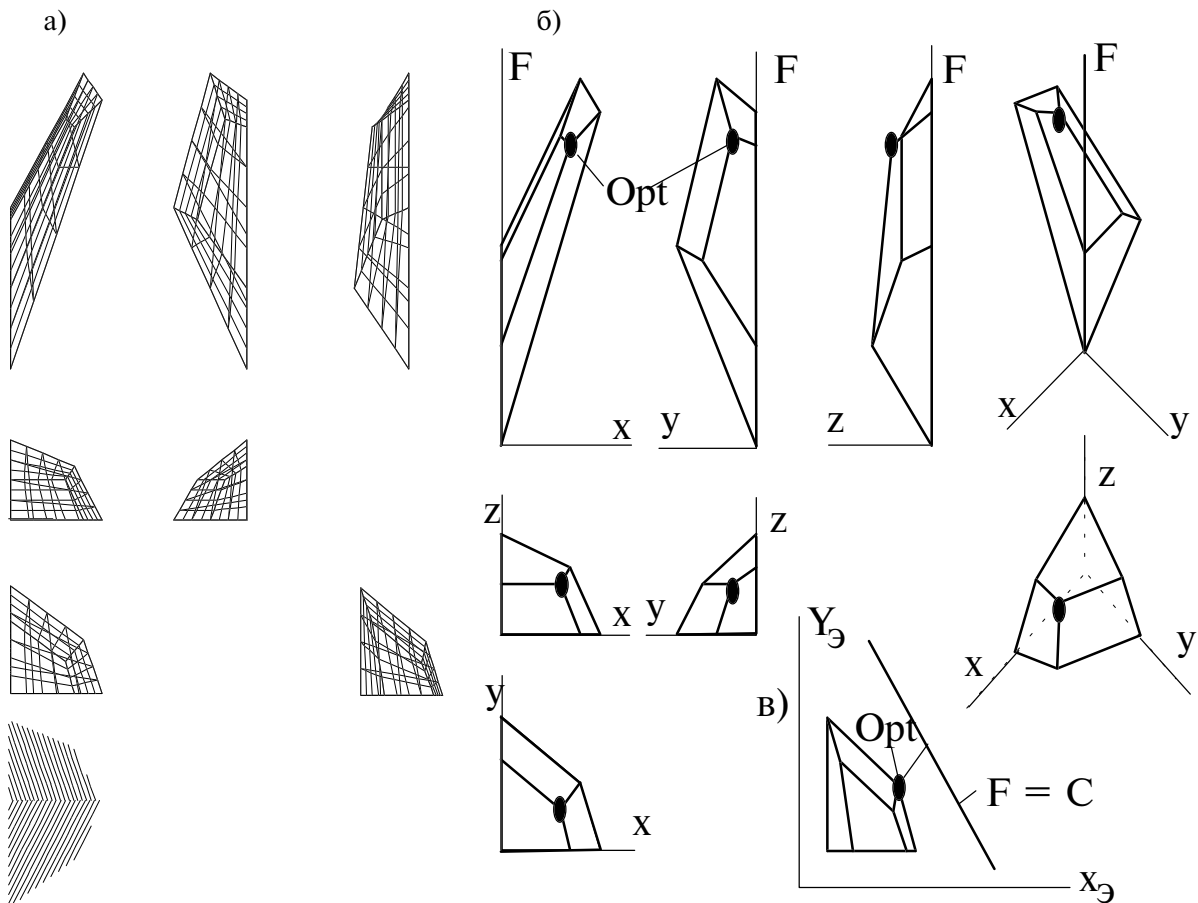


Рис.3. Решение транспортной задачи на графической модели системы "Вектор" а) структурированное и б) "проволочное" представление ЦФ и преобразование ЦФ при  $F=\text{const}$  в проецирующее положение по отношению к экранной системе координат (вид по следу ЦФ)