

ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Седых В.И., Болотов В.П., Машунин Ю.К., Сатаев А.Г.

Впервые проблема многокритериальной оптимизации сформулирована итальянским экономистом В. Парето. Формально она заключается в нахождении наилучшего (оптимального) функционирования системы F , направленного на выполнение целей по частным критериям f_k .

В векторной задаче математического программирования точка $X^0 \in S$ оптимальна по Парето, если она допустима и не существует другой точки X' , для которой хотя бы для одного критерия выполнялось строгое неравенство

$$f_k(X') \geq f_k(X^0), \quad k \in K.$$

Множество S^0 таких точек называется множеством точек, оптимальных по Парето, $S^0 \subset S$. Его также называют множеством неулучшаемых точек, т.е. нельзя найти другой такой точки, чтобы улучшался какой-либо из критериев, а остальные критерии при этом не ухудшались. Множество точек, оптимальных по Парето, лежит между точками оптимума, полученными при решении задачи отдельно по каждому частному критерию. Для случая $x \in E^2$ такое решение может быть проиллюстрировано рис.1, из которого видно, что точки локальных оптимумов подсистем отвечают векторам $X_1=(x_1, y_1)$, $X_2=(x_2, y_2)$. При этом область Парето образуется точками касания линий равных значений частных целевых функций (ЦФ).

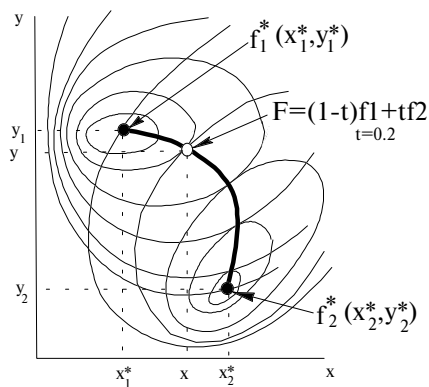


Рис. 1. Область Парето

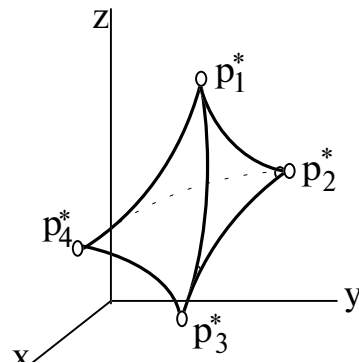


Рис.2. Возможный вид области Парето для $k=4, n=3$

Геометрически область Парето представляет собой многомерную (на рис.1 двумерную) линию, заключенную между точками локальных оптимумов x_1^* , x_2^* и линиями, соединяющими каждую пару этих точек. Линия между парой локальных оптимумов области Парето может быть определена из соотношения

$$F=(1-t)f_1(X) + tf_2(X),$$

где $0 \leq t \leq 1$.

В многомерном пространстве область Парето представляет собой k -вершинный n -мерный симплекс с вершинами, гранями и ребрами. Наиболее простым примером области Парето при $k=2, n=1$ является отрезок прямой, заключенный между точками локальных оптимумов. Для $k=n=2$ такая область реализуется в виде плоской кривой, а при $k=4, n=3$ область может иметь вид, изображенный на рис. 2.

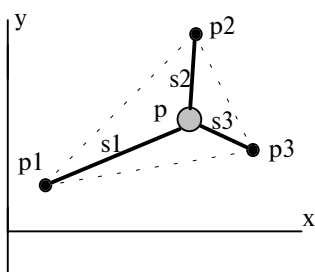
Итак, Парето удачно предлагает сузить область, в которой необходимо вести поиск оптимальных решений. Существует много методов выбора единственного решения. Например, методы, основанные на свертывании критериев в единый; методы, построенные на наложении ограничений на критерии; методы, основанные на отыскании компромиссного решения и т.д.

Приведем простые примеры многокритериальных задач с различными условиями на минимизацию/максимизацию суммы расстояний между тремя городами и различными видами конфигурации области ограничений. Достоинство этих примеров состоит в том, что для них из-

вестны прямые решения, которые могут быть использованы для сравнения и контроля в рассматриваемой методике графочисленной многокритериальной оптимизации.

Задача 1. Три города 1,2,3 (расположенные, соответственно, в точках p_1 - p_3) (рис. 3) решили построить завод (точка p) по переработке отходов. Каждый город стремится построить его ближе к себе с тем, чтобы затраты на транспортировку отходов были наименьшими. С общих позиций требуется, чтобы сумма расходов всех городов (будем считать - сумма расстояний от завода до городов) должна быть минимальной. Возможно также, что с позиций экологии каждый город стремится, чтобы завод находился как можно дальше от него.

а)



б)

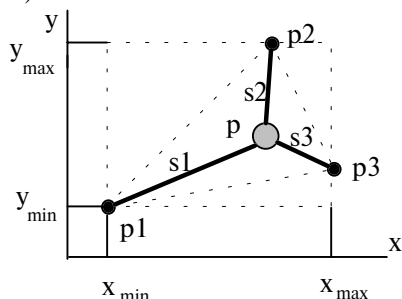


Рис. 3. Графическая интерпретация а) условий и б) области ограничений примера 1

Формализация задачи:

$$F(X) = \{ f_1(p) = |p_1 - p| \rightarrow \min; \\ f_2(p) = |p_2 - p| \rightarrow \min; \\ f_3(p) = |p_3 - p| \rightarrow \min; \} \rightarrow \min. \quad (1)$$

где

p - вектор переменных для плоскости, где его составляющими являются координаты x и y .

Область ограничений без знания априорной информации о методе выбора ее (например, как области Парето) может быть выбрана из общих соображений, например, не восточнее такого-то города, не южнее такого-то и т.д. Пусть это будет прямоугольная область (рис.3,б), построенная по максимальным и минимальным

значениям координат городов относительно декартовой системы координат, как показано на рисунке. В этом случае область ограничений запишется в следующем виде:

$$a_1 \leq x \leq a_2, \\ b_1 \leq y \leq b_2.$$

Из постановки задачи видно, что каждый критерий стремится к минимуму (нулю).

Задача 2. Необходимо построить завод на одинаковом расстоянии от каждого города.

Формализация такой постановки:

$$F(X) = \{ f_1(X) = |p_1 - p| = c; \\ f_2(X) = |p_2 - p| = c; \\ f_3(X) = |p_3 - p| = c; \} \rightarrow \min. \quad (4)$$

При этом появилась новая неизвестная величина c . Неизвестна и область, в которой может быть решена поставленная задача. Из начертательной геометрии известно, что через три точки можно провести окружность, центр которой и будет находиться на одинаковом расстоянии от всех трех точек. Однако, если три точки будут расположены на одной прямой, то радиус дуги, проведенной через три точки, будет бесконечным и задача в этом случае не будет иметь решений. Для нашего примера центр приблизительно известен (внутри треугольника) и поэтому ограничения выберем так же, как и в первом примере:

$$a_1 \leq x \leq a_2, \\ b_1 \leq y \leq b_2.$$

Решение 1-й и 2-й задач сводится к определению в плоскости треугольника p_1 - p_3 точки Торичелли /сумма расстояний до которой от трех заданных точек-городов была бы минимальной/и точки наименьшего компромисса (в частном случае центр окружности, описанной через три заданные точки). Координаты положения городов известны: $p_1(30.,20.)$, $p_2(50.,90.)$, $p_3(80.,30.)$.

Структуризацию (перебор точек внутри области) выполним по следующей формуле:

$$x = (1-v)((1-u)p_1.x + up_2.x) + vp_3.x; \\ y = (1-v)((1-u)p_1.y + up_2.y) + vp_3.y;$$

где

$$0 \leq u \leq 1, \\ 0 \leq v \leq 1.$$

Решаем задачу по следующей схеме:

Шаг 1. Определяем минимум/ максимум по каждому критерию:

$$X_1^*=(x=,y=); f_1^{\min} = 0;$$

$$f_1^{\max} = 72.8011;$$

$$X_1^*=(x=,y=); f_1^{\min} = 0;$$

$$f_1^{\max} = 72.8011;$$

$$X_1^*=(x=,y=); f_1^{\min} = 0;$$

$$f_1^{\max} = 67.082.$$

Примечание 1. Знак " * " означает параметр, к которому стремится частная ЦФ.

Определяем область Парето посредством фиксации линий между парами локальных оптимумов на области ограничений по формуле

$$F(X)=(1-t)*f_1(X) + t*f_2(X) \rightarrow \min$$

(или $\rightarrow \max$)

$$F(X)=(1-t)*f_2(X) + t*f_3(X) \rightarrow \min$$

(или $\rightarrow \max$)

$$F(X)=(1-t)*f_n(X) + t*f_{n-1}(X) \rightarrow \min$$

(или $\rightarrow \max$) (2)

где $0 \leq t \leq 1$.

В данном случае граница области Парето совпадает с прямыми треугольника, что подтверждается и картиной линий уровня (см. рис. 6,а).

Шаг 2. Проводим анализ системы на предмет ее минимизации методом свертки. Так как условия приоритета не оговорены, строим общую ЦФ как сумму частных ЦФ (рис.4,а):

$$F = f_1 + f_2 + f_3.$$

Минимум функции F даст значения вектора (координаты x,y), соответствующего искомой точке p* (точке Торричел-

ли), т.е. точке, сумма расстояний от которой до трех заданных является минимальной. Ее координаты

$$P^*(x^*=54.8, y=40.8).$$

Ввиду того, что частные критерии определены в единых размерных единицах, величина функции F дает и искомое расстояние:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 = s_1 + s_2 + s_3 = 109.218,$$

где s1-s3 см. по рис. 3.

Шаг 3. Определяем вектор (точку), обеспечивающую условия минимального компромисса. Для этого строим график (рис. 4,б) суммы отклонений пар частных ЦФ. Минимум этого графика и определит точку компромисса между функциями f1-f3. Если минимум ЦФ равен нулю, то достигнут полный компромисс (в этой точке все частные ЦФ равны); если он не равен нулю, то в этой точке глобальный компромисс между функциями f1-f3 будет считаться минимальным. Если же точка компромисса не одна, можно воспользоваться нормализацией частных ЦФ и решать задачу с помощью максиминного подхода. Уравнение ЦФ по определению глобального компромисса будет иметь вид

$$F(X) = |f_1 - f_2| + |f_3 - f_2| + |f_3 - f_1|.$$

Минимум функции F(X) будет в точке с координатами x=48.,50.

Шаг 5. Окончательное решение за лицом, принимающим решение (ЛПР).
Конец решения.

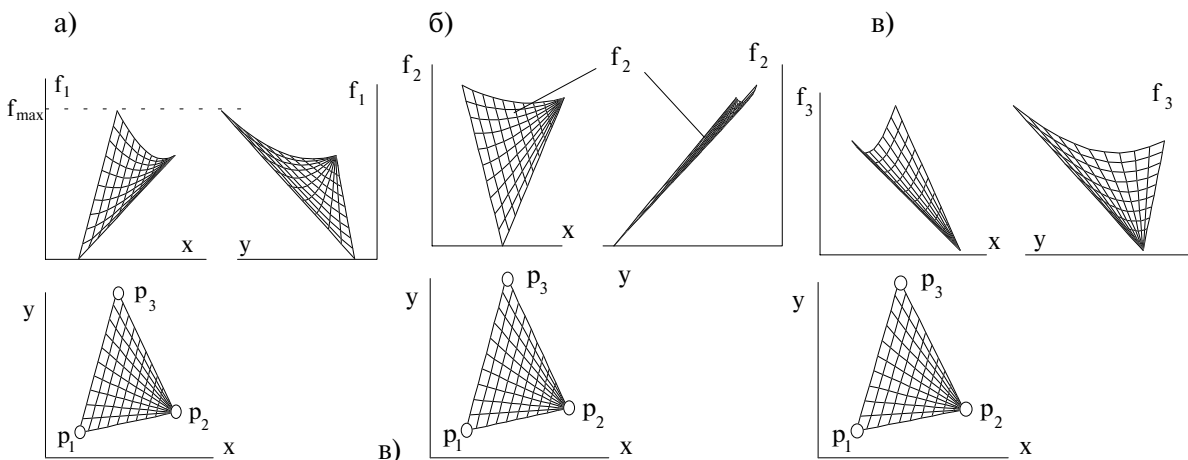


Рис. 4. Изображение частных ЦФ f1-f3 на трех проекциях определение на них точек оптимума

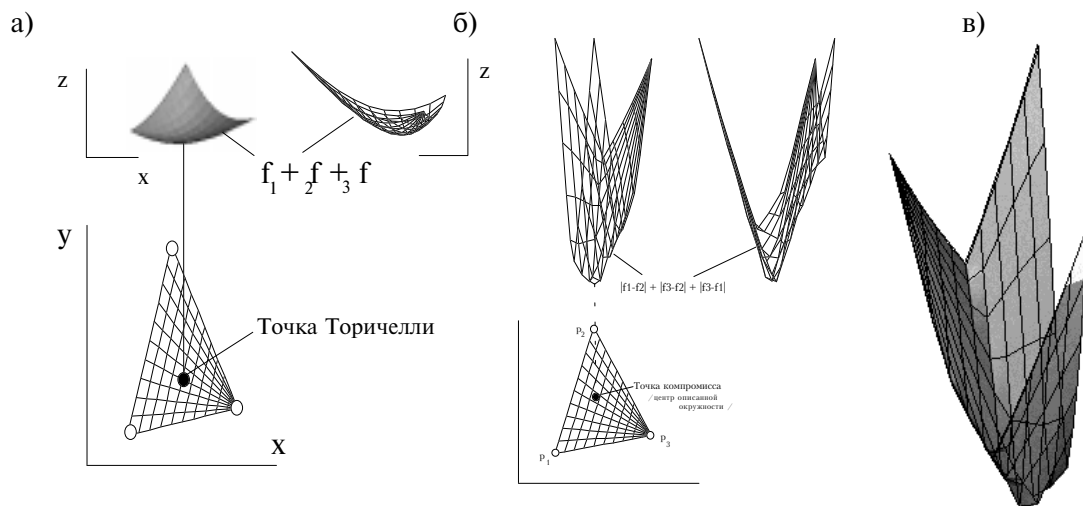


Рис. 5. Оптимум и компромисс трехкритериальной задачи

Приведенный пример уникален тем, что на нем можно проверить сходимость предложенных методов многокритериальной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации.-М.:Наука 1986.-141с