О ПРИМЕНЕНИИ КОМБИНАТОРИКИ И КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА В СИСТЕМЕ "ВЕКТОР"

Болотов В.П., Коркишко С.В.

Комбинаторика и комбинаторный анализ есть распределение (чаще всего наилучшим способом) элементов по группам в соответствии с некоторыми заранее подготовленными условиями. Числовые комбинаторные задачи с древних времен применялись, например, в магических квадратах.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис.1

Древний китайский логический квадрат Ло Шу - один из примеров составления комбинаций. Требуется в квадрате 3 х 3 так расставить 9 цифр, чтобы суммы трех цифр в любом ряду по горизонтали, вертикали или диагонали были равны между собой. Квадрат Ло Шу является единственным решением этой задачи, не считая решений, получающихся из него при поворотах и отражениях.

Математического решения квадрата Ло Шу не существует. Для решения задачи на ПК можно предложить различные варианты. Самый простой - перебрать всевозможные случаи, т.е. из девяти цифр выбрать так девять цифр, чтобы они не совпадали и при сложении по горизонтали, вертикали, горизонталям сумма чисел была постоянной. Выбор чисел можно осуществлять по методу выбора чисел с помощью генератора случайных чисел. Когда выпадет по всем ячейкам необходимое сочетание, то выход. В общем работа ПК будет долгой (на ПК типа Pentium требуется не менее 3 часов ее работы), поэтому желательно совмещать просто перебор с аналитическим подходом. Действительно, задачу Ло Шу можно значительно упростить. Значения центральной ячейки можно вычислить через уравнения выражающие пересечения вертикали, горизонтали и диагоналей. Сумма их будет равна 60, а центральная ячейка 5. Вычисления остальных ячеек можно свести к их вычислению через две из них заданных. Таким образом, задача сводится к перебору цифр только в двух ячейках. Это можно осуществить или с помощью выбора цифр по методу случайных чисел (см. рис. 2), или перебора их через двойной цикл. На языке "Калькулятор" системы "Вектор" см. рис. 3

Нахождение закономерности в случайном всегда интересовало людей. Мир построен дискретно: атомы, молекулы, кванты, спин - все это примеры дискретности строения окружающего мира. Генетическая информация переносится молекулами с помощью кода, состоящего из 4 букв. Мириады комбинаторных задач возникают в теории информации, теории ЭВМ. И в тоже время, именно, ЭВМ позволяют решать немало таких задач комбинаторики, которые были недоступными до их появления. Основными задачами комбинаторики являются задачи на "существование" и "перечисление". Решение задач на "существование" состоит в том, чтобы ответить, существует ли некоторое заданное множество элементов или нет. Ответом является пример возможности построения такого множества или доказательства невозможности построения такого множества. Если множество существует, возникает задача перечислить множества данного типа.

Методы решения задача комбинаторики фактически сводятся к двум вычислительным операциям: перечислить и сравнить. Многие формулы комбинаторики доказываются с помощью принципа математической индукции: утверждение справедливо для всякого натурального n, если 1) оно справедливо для $n=1$, 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$. "Понимание и умение применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости" (А. Н. Колмогоров).

Формула числа перестановок: $Pn=n!$ При $n=1$ имеем $P1=1$; при $k>=1$ имеем $Pk=k!$ При $P(k+1)=(k+1)!$ и т.д. Применяя принцип математической индукции, можно доказать что и для следующего натурального числа $n=k+1$ справедливо равенство:

$$P_{k+1} = (k+1)!$$

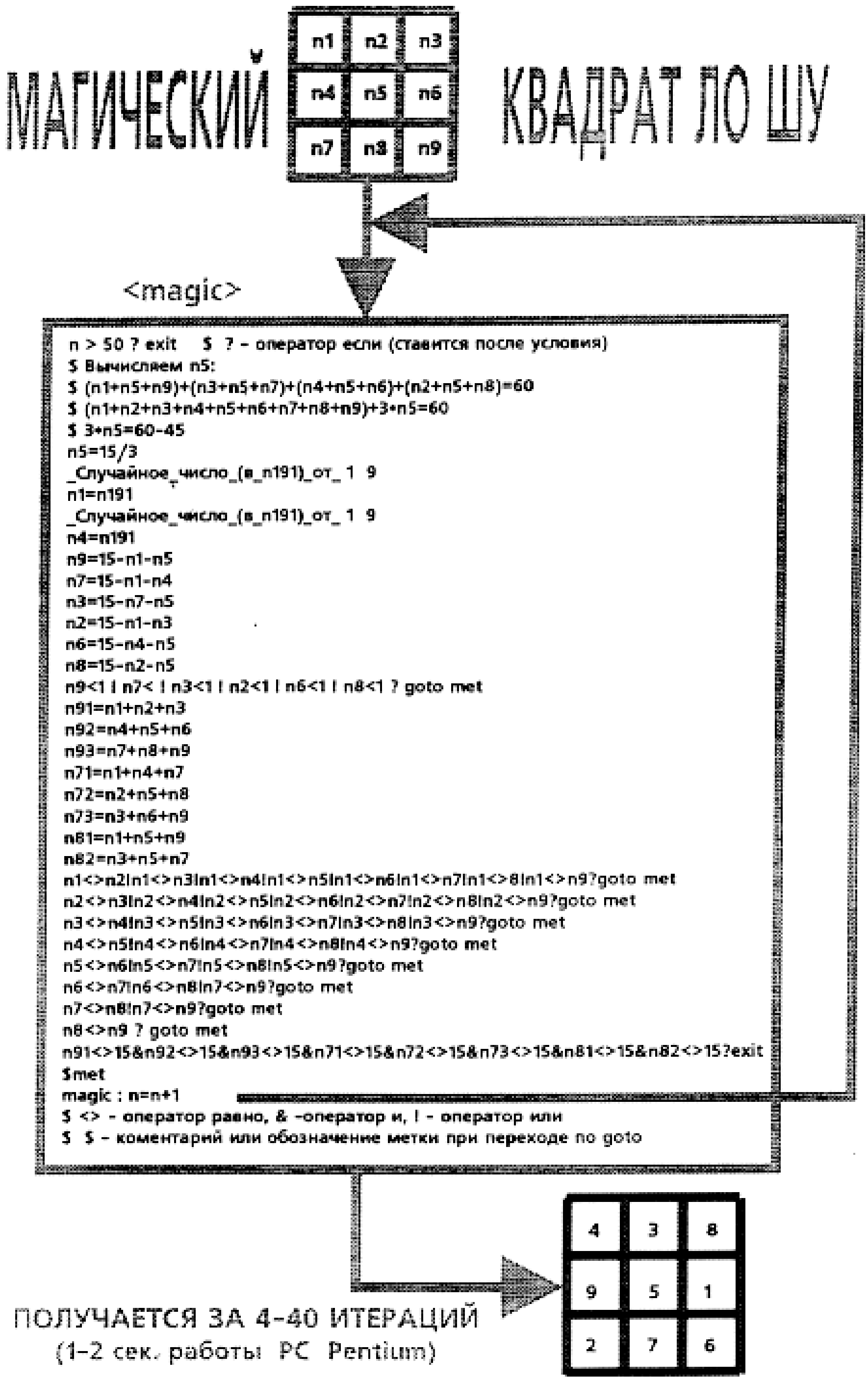

Рис. 2. Решение квадрата Лу Шу по методу случайных чисел

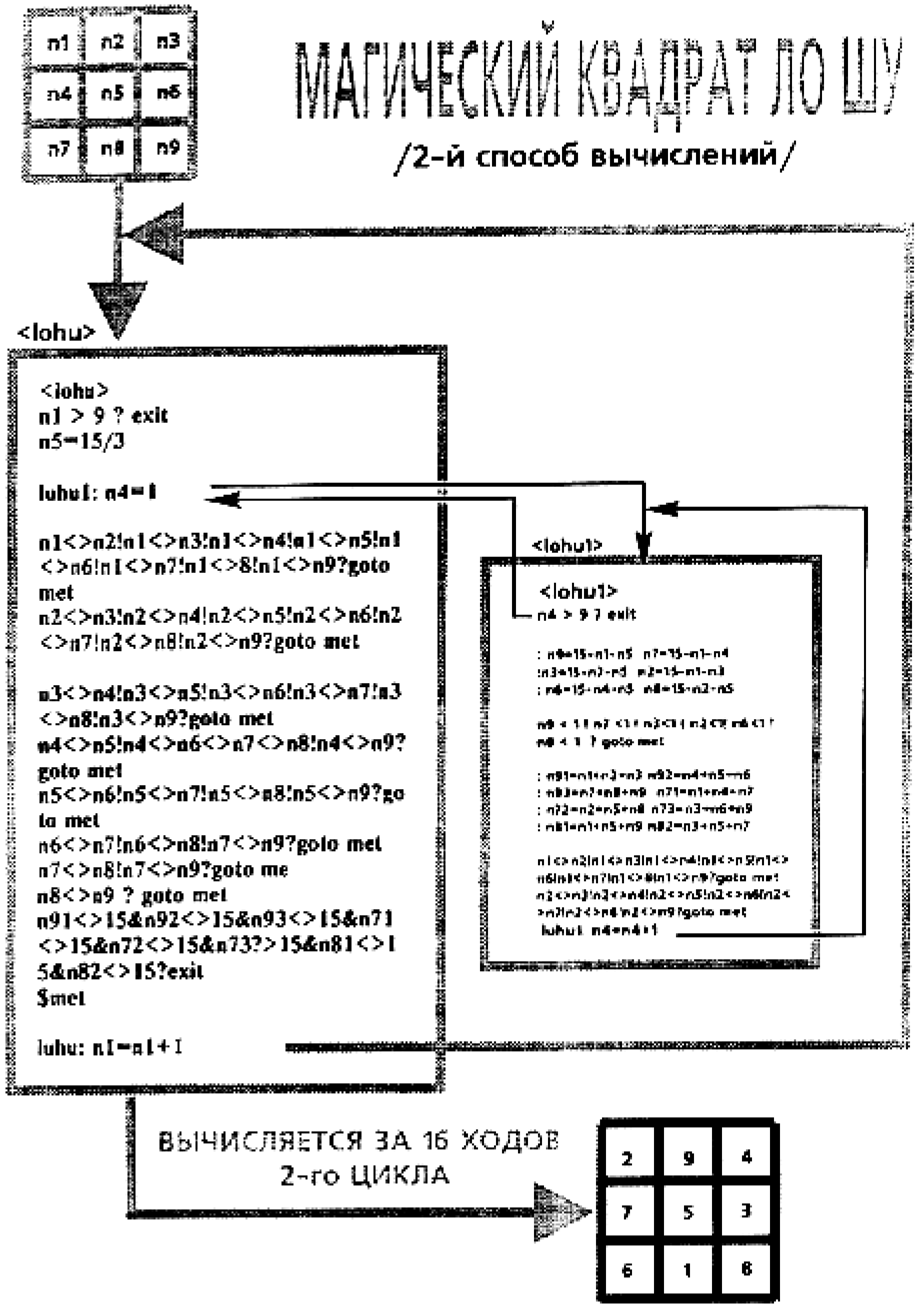

Рис. 3. Решение квадрата Лу Шу по методу перебора

Пример 1. Построить магический шестиугольник, имеющий 5 вертикальных рядов и 10 диагоналей, с 19 ячейками. Требуется расставить цифры от одного до 19 так, чтобы по всем рядам сумма чисел была постоянной. Магическая постоянная (МП) определяется сложением всех чисел от одного до 19 (в данном случае она равна 190), делением ее на пять (число допустимых рядов в одном направлении) и равна 38 (190/5=38).

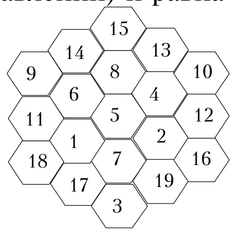

Рис. 4. Единственный магический шестиугольник

Например, для магического квадрата Шу МП равна 15 - делением суммы от одного до девяти, равной 45, на число рядов (три). Порядок МК определяется числом элементов на стороне квадрата или шестиугольника. Так, для всех шестиугольников существует один магический шестиугольник, на поиски которого Адамс потратил 45 лет. Он взял 19 керамических плиток, написал на них цифры от одного до 19 и каждое воскресенье в течение 45 лет искал необходимое сочетание. Как-то раз даже нашел его, записал на листок бумаги и потерял, и только после трехлетнего перерыва, когда ему удалось найти запись, он сумел сообщить о своем открытии. На рис. 4 представлен магический шестиугольник, полученный Адамс.

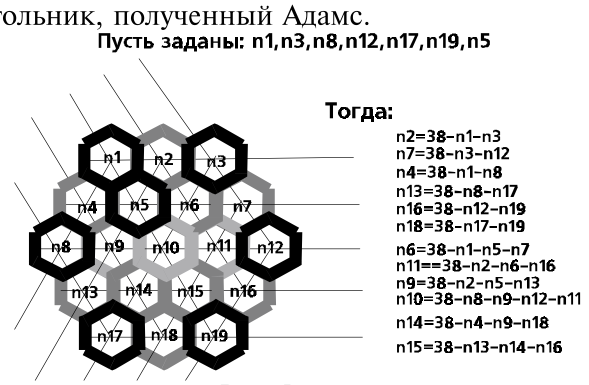

Рис. 5

Аналитечески задачу можно свести к вычислению 12 ячеек по 7 задаваемым тем или другим способами (рис. 5). Вычисления также как и для квадрата Ло Шу можно осуществлять по методу случайных чисел или с помощью вложенных циклов - перебора возможных сочетаний. Важным является вычислить, какое процеессорное время ПК будет затрачено на выполнение расчетов по тому или иному методу и как это время уменьшить. Для начала надо подсчитать сколько будет перестановок.

Для Ло Шу в случае, когда все 9 чисел неизвестны будет 9 перестановок по 9 (9!), которые вычисляются:

P_9^9=n!/(n-)!=9*8*7*6*5*4*3*2*1=362880 (0!=1).

В случае, когда число неизвестных сведено до двух их будет:

P_9^2=n!/(n-2)!=
9*8*7*6*5*4*3*2*1/7*6*5*4*3*2*1=9*8=72

Как видим число перестановок значительно уменьшилось.

Для шестиугольника Адамса число перестановок в общем случае будет 19!

В случае, когда число неизвестных доведено до 7, перестановок будет

P=19*18*17*16*15*14*13=253955520.

Как было замечено, для выполнения расчетов на ПК можно предложить два варианта: 1) это выполнить просто перебор, причем на ПК будет вычисляться не по формуле перестановок: n!/(n-m)!=19!/(19-7)!=19*18*17*16*14*13, а - 19^6, что значительно увеличивает процедуру расчета и 2) по методу случайных чисел.

В расчетах по методу случайных чисел можно надеяться, что результат может “выпасть” намного раньше. В этом плане существуют математические уравнения, с помощью которых можно вычислить вероятность получения необходимого результата или относительную частоту событий. Проверим некоторые из них на примерах с квадратом Ло Шу.

В табл. 1 приведены 20 испытаний при которых были получены решения. Даны число итераций (шагов работы МК).

Таблица 1

№ исп	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
число шагов	3	30	15	23	3	7	1	10	5	11	1	2	3	13	28	10	5	20	6	2

Общее число затраченных шагов на 20 испытаний равно 198. В среднем получается 9 шагов на то, чтобы получить необходимый результат. Заметим, что это лучше, чем результат полученный с помощью 2-х рекурсивных вложенных циклов (затрачено 17 шагов см. рис.) при том, если учесть, что обстоятельства расчета с помощью циклов сложились удачно: верхний цикл закончил свою работу при n1=2. Если бы их было 9 (что могло вполне быть), то шагов бы пришлось сделать не менее 81 (9*9).

Пусть для решения задачи Ло Шу задается ограниченное количество шагов, допустим 10. Требуется определить какой вы имеете шанс получить магический квадрат Ло Шу. Шанс на успех изложил Лаплас: как отношение случаев, благоприятствующих явлению, к числу всех возможных случаев.

Пусть в серии ***n*** испытаний (в табл. 2 их дано 20) событие ***A*** (квадрат Ло Шу) появилось ***m*** раз (11 раз).

Таблица 2

№ исп	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
число шагов	3			8	-	4		10	5	1	3	7	1	10	5		5	1	2	3
	+	--	-	+		+	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+

Видим, что в 20 испытаниях в цикле от 0 до 10 получили 11 положительных результатов. Вероятность получения квадрата Ло Шу в цикле от 0 до 10 будет определяться: m/n = 11/20=0.502, т.е чуть больше чем 1/2. Относительная частота определяется m/n и равна 20/11=1.8.

Резюмируя можно сказать, что увеличивая число шагов расчета можно свести к 100 % гарантии получения требуемого результата. Для работы ЭВМ задание большего числа итераций не имеет значения (программа все равно закончит свою работу). Однако для ситуаций например, при планировании и т.п, это важно. Поэтому, желательно, иметь более точную и наименьшую цифру числа итераций при которой успех бы был гарантирован на 100 %.

Для Ло Шу и 6-ка Адамса Ло Шу решения единственные и задав достаточное число циклов можно получить требуемый результат.

Интерес представляет другой случай, когда решений достаточно много и требуется определить минимальное число итераций при котором бы можно было получать требуемый результат.

N1	N2	N3	N4
N5	N6	N7	N8
N9	N10	N11	N12
N13	N14	N15	N16

Рис. 5

Рассмотрим пример с магическим квадратом 4-го порядка. В этом квадрате 16 неизвестных величин и 10 уравнений (4 по горизонтали, 4 - вертикали и два по диагоналям).

Сумма чисел от одного до 16 равна n*(n+1)/2 =136.

Магическая постоянная 136/4=34. Число решений в данном квадрате - 880.

Восемь переменные в клетках можно выразить по восеми задаваемым:

n3=34-n1-n2-n4, n10=34-n4-n7-n13,
n14=34-n2-n6-n10,   n11=34-n1-n6-n16,
n5=34-n2-n6-n14,   n9=32-n1-n5-n13,
n8=34-n5-n6-n7,   n12=34-n4-n8-n16.

Число перестановок возможно n!/(n-8)! 16!/(16-8)!=16!/8! и равно 16*15*14*13*12*11*10*9=518 918 400 (518 миллионов). Если организовать перебор с помощью рекурсивных вложенных циклов, общее число шагов в циклах еще будет больше и будет равно 16^8. Перебирая всевозможные перестановки (на что потребуется десятки часов) можно получить все 880 решений. Однако, как получить решение в более короткое время? Один и вариантов это неизвестные (условно названные) выбирать по методу случайных чисел. Однако, как показал эксперимент и в этом случае нахождения даже одного (из 800 магических квадратов) происходит очень долго.

Процесс расчета можно улучшить за счет поиска новых алгоритмов, улушения порограмм и их оптимизации и программирования на языках нижнего уровня.

Продалжая тему магических квадратов, можно заметить, что всякий раз, когда целые числа располагаются по какой-то “красивой” единственной схеме (например, выбор простых чисел или греко-латинские квадраты Эйлера), то у этой схемы обнаруживается масса самых неожиданных свойств, которые могут быть применимы в теории игр, стратегиях или экспериментах.