МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Коркишко С.В., Болотов В.П.

Наибольшее распространение из графических систем получили системы, имитирующие тем или иным образом действия чертежника за кульманом. Входной язык этих систем базируется на таких понятиях как "сопряжение", "параллельность", "перпендикулярность". При определении математической модели элементарной геометрии полезным является возникшее в рамках алгебры понятие о комплексных числах.

В рамках этого понятия окружности (их дуги) и прямые можно рассматривать как совершенно равноправные объекты, т.е. прямые - это те же окружности, но с бесконечно большим радиусом. Такое представление делает алгоритмы решения задач на пересечение и сопряжение независимыми от того, что задано - прямая или окружность.

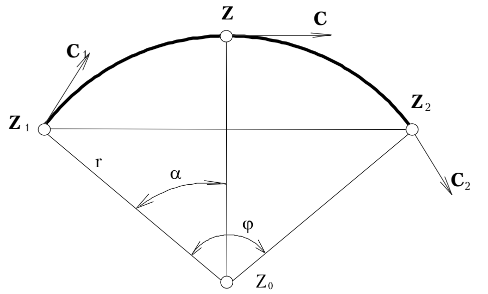


Рис. 1. Дуга на комплексной плоскости

Так, в обычной постановке задача на пересечение распадается на три отдельные подзадачи: пересечение отрезка с отрезком, отрезка с дугой, дуги с дугой. При представлении дуг и отрезков с помощью комплексных чисел решение таких задач проще и может быть выбрано единственным.

Пусть, на комплексной плоскости (рис. 1) задана направляющая дуга: $\nu = e^{i\varphi/2}$, и где ***z***1-начальная точка дуги, *z*2-конечная точка дуги, *j*- центральный угол дуги (*j* > 0 при вращении против ч.с. *j* < 0 при вращении по ч.с.), т - центральный параметр дуги. Тройка (*z*1**,** *z*2, *n*) однозначно определяет дугу. Для отрезка центральный угол ***j*** равен нулю, *n*=1, поэтому направленный отрезок на комплексной плоскости задается тройкой (*z*1**,** *z*2, 1).

Параметрическое представление дуги и отрезка на комплексной плоскости имеет вид:

$$z = \frac{z2 - h\nu z1}{1 + h\nu}, \qquad (1)$$

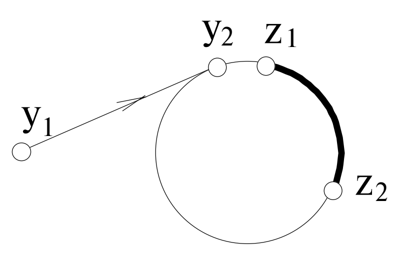
где параметром служит действительное число ***h.*** При этом значению ***h***=0 соответствует точка ***z=z***2, при ***h*** ®Г, ***z*** =***z***1.

Отображение ***h*** в точки дуги ***z*** непрерывно и взаимно однозначно. Если ***n***=1, то формула (1) определяет отрезок с начальной точкой ***z***1 и конечной точкой ***z***2.

В практическом приложении встречаются следующие задачи.

1. Найти точки пересечения двух дуг (двух отрезков, отрезка и дуги).
2. Построить отрезок с заданной начальной точкой, касающийся в своей конечной точке заданной окружности (рис.2, а).
3. Построить отрезок, касательный к двум окружностям (рис.2, б).
4. Построить дугу радиуса с заданной начальной точкой, касающуюся в своей конечной точке заданной окружности или прямой.
5. Построить касательную дугу радиуса к двум заданным объектам (рис.2, в).
6. Построить дугу, касающуюся трех направленных окружностей в заданном порядке (задача Апполония) (рис.2, г).

а)



б)

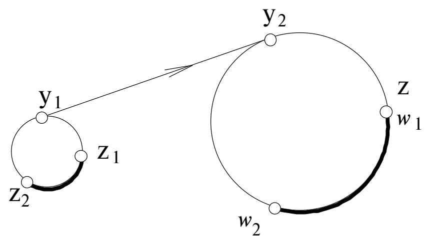


Рис.1

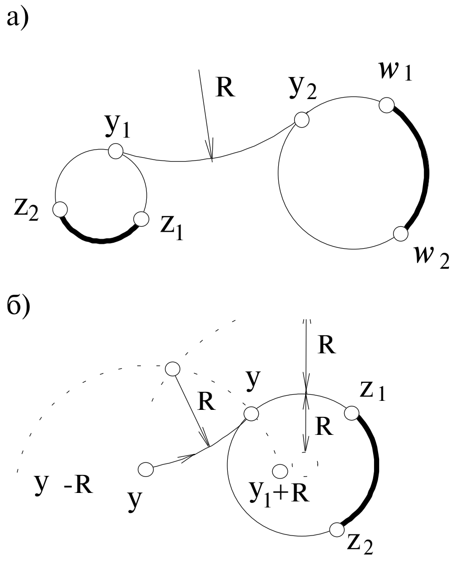


Рис. 2

При решении этих задач можно выделить следующие шаги.

1. Составление билинейных уравнений, отвечающих решению поставленных задач.

2. Вычисление коэффициентов одного или двух билинейных уравнений.

3. Решение уравнений.

4. Вычисление параметров искомых уравнений.

Шаг 3 этой схемы - общая часть всех алгоритмов. Шаги 2, 4 просты: коэффициенты уравнений вычисляются по исходным данным без предварительного анализа положения и выделения особых случаев.

Задача Апполония (рис. 2, г) решается по известной схеме геометрических преобразований:

- расширение третьей дуги на величину **- *R***. Эта дуга сводится к точке;.

- перенос на величину ***-x*0**. Точка ***x*0** переходит в начало координат, точки начало/конца двух других дуг преобразуются по формуле: ***z'= z-x0***;

- инверсия.

Точка начала координат при инверсии перемещается в бесконечность и исходная задача сводится к задаче построения отрезка, касательного к двум окружностям

В качестве примера рассмотрим решение задачи 1: найти точку пересечения двух объектов (двух дуг, 2-х отрезков, отрезка и дуги).

Параметрическое представление первого объекта:

$$z = \frac{z2 + hvz1}{1 + yv}. \qquad (1)$$

Параметрическое представление второго объекта:

$$z = \frac{w2 + gvw1}{1 + g\eta}, \qquad (2)$$

где параметром служит неотрицательное вещественное число ***g***. В точке пересечения должно выполняться равенство (1) и (2). Это равенство можно рассмотреть как уравнение с неизвестными ***h*** и ***g***.

Уравнение сводится к следующему

$$ahg + bh + cg + d = 0, \qquad (3)$$

где

$$a = v\eta(z1 - w1); \quad b = v(z1 - w2),$$
$$c = \eta(z2 - w1); \quad d = z2 - w2.$$

Уравнение (3) решается как система двух билинейных уравнений с действительными коэффициентами. Решения может не оказаться - объекты не пересекаются. Одно решение, когда имеется касание, и два - в случае пересечения прямой (дуги) с окружностью.

Проверка неотрицательности ***h, g*** определяет пересечение с основной частью дуги или ее дополнительной.

В системе "ВЕКТОР" данная методика реализована в модуле Vec_Line.