ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА К ВОПРОСАМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. П. Болотов, П. В. Филиппов
(Ленинградское высшее инженерное морское училище
им. адмирала С.О.Макарова)

Конструирование гладкой поверхности в трехмерном пространстве с помощью ключевых методов основано на построении по двум заданным конкурирующим поверхностям так называемой производной поверхности, что эквивалентно решению задачи начертательной геометрии четырехмерного пространства - построению по двум заданным проекциям двумерной поверхности на координатные трехмерные подпространства третьей проекции на третье координатное подпространство [1].

Ключевые методы позволяют получить весьма рациональное решение задачи конструирования гладкой поверхности сложной формы, если в качестве конкурирующих поверхностей используются поверхности более простых форм. Однако часто для получения интересующего нас решения задачи построения искомой поверхности, удовлетворяющей определенным требованиям, одна из конкурирующих поверхностей должна быть задана сложным каркасом.

Эта поверхность может рассматриваться как производная поверхность от двух каких-то, в свою очередь, конкурирующих поверхностей.

При такой постановке вопроса нам придется иметь дело с построением новой проекции в пространстве уже более высокого числа измерений. Таким образом, увеличение размерности пространства при построении конструируемой поверхности приводит к возможности замены мощных конкурирующих поверхностей более простыми.

Покажем это на примере решения задачи построения гладкой поверхности Φ_0, проходящей через контур, заданный кривыми $\varphi(x)$, $f(x)$, ψ(y), лежащими в трех координатных плоскостях. Интересующее нас решение задачи осуществимо в пространстве пяти измерений, однако, руководствуясь соображениями выбора простых конкурирующих поверхностей, целесообразно размерность пространства увеличить до семи. Вместе с тем это позволит и нагляднее проследить процесс формирования конструируемой поверхности.

Если точку пространства E^n, отнесенную к декартовой системе $0xyzy_1y_2z_1z_2$, последовательно ортогонально проецировать на координатные трехмерные подпространства xyz_1, $xy_1z_1xy_1z_2$, которые впоследствии совмещать друг с другом вращением вокруг оси $0x$ и далее проецировать на картинную плоскость, параллельную плоскости $0yz$, обеспечив по всем аксонометрическим осям показатели искажения, равные единице, получим изображение, представленное на рис. 1.

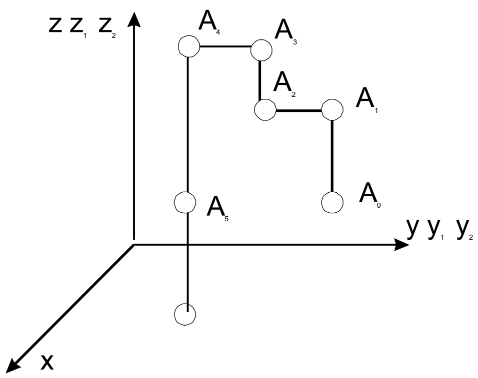

Рис. 1

Аналогично на чертеже можно получить изображение и двумерной поверхности, однако во избежание наложения проекций этой поверхности друг на друга целесообразно аксонометрические изображения на отдельных трехмерных подпространствах разнести параллельно, как показано на рис. 2.

На рис. 2 кусок двумерной поверхности Ф представлен проекциями Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, Φ_{xy_2}, производная поверхность Φ_0 ограничена кривыми φ (x), $f(x)$, ψ (y). Эти кривые конгруэнтны, соответственно, кривым на проекциях Φ_1, Φ_3, Φ_5.

Пусть заданы кривые $\varphi(x)$, $f(x)$, $\psi(y)$, ограничивающие поверхность Φ_0. Требуется построить эту поверхность.

Если следовать методу, изложенному в работе [1], то для построения искомой поверхности нам следовало бы выбрать две конкурирующие поверхности, по которым и строить искомую. Если в качестве одной конкурирующей поверхности выбрать коноид Φ_1

$$(1 - x^2)(1 - z_1)^2 - y^2 = 0, \qquad (1)$$

а искомой поверхностью будет, например, шар единичного радиуса Φ_0

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (2)$$

то вторую конкурирующую поверхность Φ_1'

$$(1 - x^2)(1 - z_1)^2 + x^2 + z^2 = 1, \qquad (3)$$

получим, решая совместно уравнения (1) и (2).

Поверхность Φ_1' сложна и использовать ее в качестве конкурирующей нерационально. Но эту поверхность, в свою очередь, можно представить как производную от конкурирующих Φ_2 и Φ_6' или Φ_5 и Φ_7'. Уравнения поверхностей Φ_6' и Φ_7' можно найти, решая систему уравнений, описывающих поверхности Φ_0, Φ_1, Φ_2 или Φ_0, Φ_1, Φ_7. Поверхность Φ_6' в первом случае можно представить как производную от конкурирующих Φ_5 и Φ_3.

Таким образом, конструирование поверхности Φ_0 при помощи удобных для построения конкурирующих поверхностей Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, как показано на рис. 2, эквивалентно задаче построения дополнительной проекции двумерной поверхности в пространстве семи измерений.

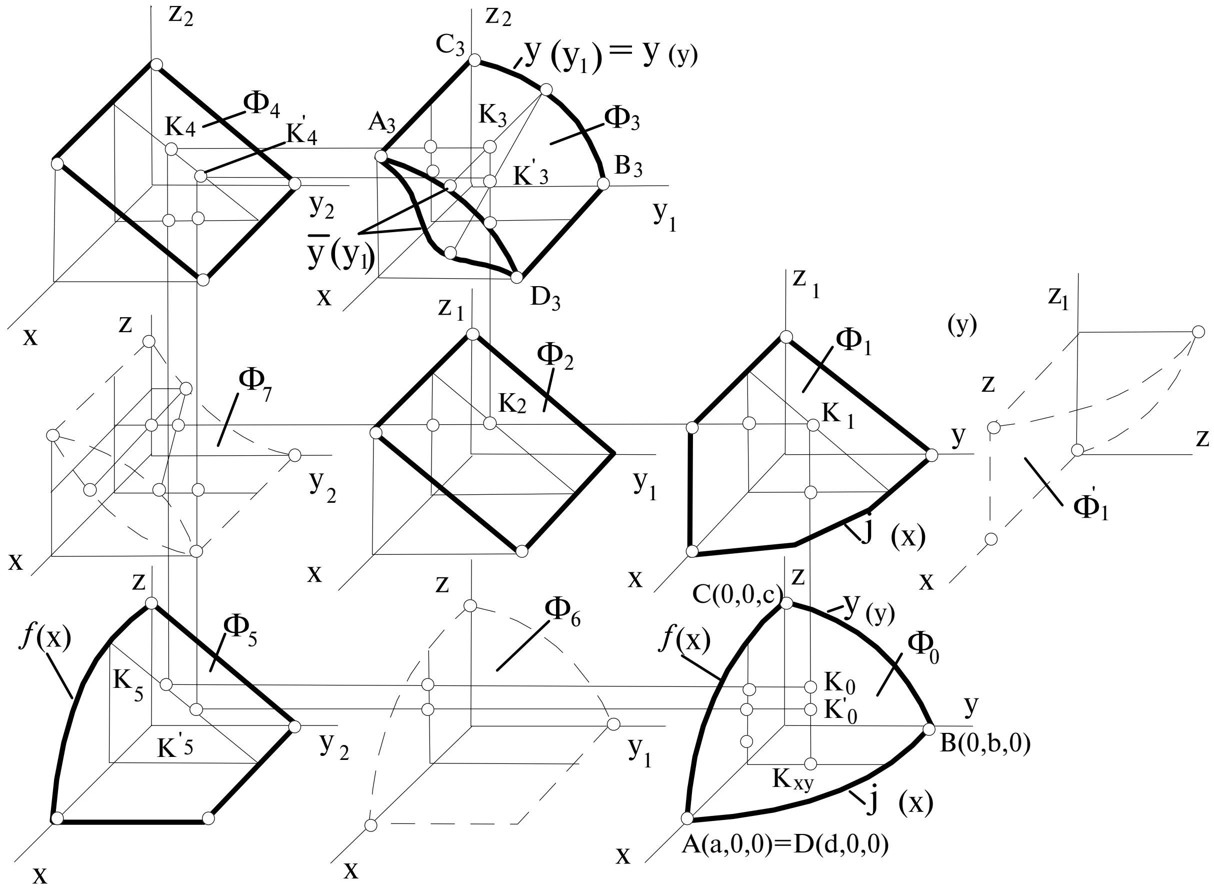

Рис. 2

Если поверхность Фз будет являться цилиндроидом, что может быть достигнуто изменением формы кривой$_3$ (y_1) (рис.2), то соответственно изменится и форма поверхности Φ_0. При этом она по-прежнему будет проходить через кривые φ(x), $f(x)$, $\Psi(y)$. Это свидетельствует о том, что такой путь конструирования поверхности Φ_0 дает возможность получить множество решений поставленной задачи.

Для примера на рис. 2 изображены точки K и K' искомой поверхности при различном выборе свободной функции.

Аналитически уравнение поверхности Φ_0 может быть выражено в следующей форме:

$$z(x,y) = \theta + \tfrac{x}{a}(\bar{\theta} - \theta), \qquad (4)$$

где

$$\theta = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \psi\left[y \cdot \frac{\varphi(0)}{\varphi(x)}\right], \qquad \bar{\theta} = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \bar{\psi}\left[y \cdot \frac{\varphi(0)}{\varphi(x)}\right].$$

Уравнение (4) выражает последовательное преобразование поверхности Φ_3 в Φ_6', а затем в Φ_0.

Распространяя этот принцип на пространства более высокого числа измерении, можно аналогичными преобразованиями конструировать гиперповерхности пространства E^n.

Уравнение конструируемой гиперповерхности $Ф^{n-1}$ в пространстве E^n с координатными осями $x, z, y_3, y_4, \dots y_n$ будет иметь вид

$$z(x, y_3, y_4, \dots y_n) = 0 + \frac{x}{a}(\overline{\theta} - \theta),$$

где

$$\theta = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \psi^{n-2}\left[y_3 \frac{\varphi_3(0)}{\varphi_3(x)}, y_4 \frac{\varphi_4(0)}{\varphi_4(x)}, \dots\dots, y_n \frac{\varphi_n(0)}{\varphi_n(x)}\right],$$

$$\overline{\theta} = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \overline{\psi}^{n-2}\left[y_3 \frac{\varphi_3(0)}{\varphi_3(x)}, y_4 \frac{\varphi_4(0)}{\varphi_4(x)}, \dots\dots, y_n \frac{\varphi_n(0)}{\varphi_n(x)}\right]$$

Для графического построения этой гиперповерхности нужно рассмотреть ее в пространстве E^{2n+1}.

---

*Котов И.И. Геометрические основы ключевых способов построения поверхностей. Начертательная геометрия.- Труды ВЗЭИ. Вып. 10, 1957.