ПРОЕКТИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Болотов В.П.

Гипотеза плоских сечений на комплексной плоскости является весьма эффективным приемом в инженерной практике судостроения.

Если с каждым значением переменного $z=x+iy$ из множества D замкнутой числовой плоскости сопоставляется определенное значение переменного $w'=w+iv$ из множества w замкнутой числовой плоскости, то $f{:}z\to\omega'$, называется комплексной функцией комплексного переменного (ФКП) z. При этом D - область определения, $\boldsymbol{w}$- область значения функции $\boldsymbol{f}$. Обозначение $w=f(z)$ можно переписать в виде $w=u(x,y)+iv(x,y)$.

Существуют следующие известные ФКП:

- элементарного вида: z, z^2, $1/(z-a)$, $1/z^2$, lnz, e^z, $sinz$, $cosz$, shz, chz, tgz;

- Римановы функции вида $w=z^{1/n}$;

- дробно-линейного преобразования вида:

$$w=\frac{az+b}{cz+d};$$

- Жуковского вида:

$$w=\frac{k}{2}(z+\frac{1}{z});$$

- линий тока вида:

$$x=\varphi-e^{\varphi},$$

$$y=\pi;$$

- конформные преобразования плоскости z, находящейся вне контура $\boldsymbol{l}$, на внешность единичного круга $|r|>1$.

Последнее преобразование приводит к задаче полного обтекания и, соответственно, определения по формуле Жуковского составляющих вектора давления на обтекаемое тело.

Конформные преобразования используются также при решении многих прикладных задач (например, гидродинамики, электростатики, теории полей, расчета прочностных характеристик), для вычисления присоединенных масс судовых сечений, проектирования обводов судна и т.п.

Алгоритм построения конформных сеток в криволинейном четырехугольнике основан на известной теореме о том, что любую односвязную область с четырьмя отмеченными на границе точками можно конформно отобразить на параллелограмм. Если задать в параллелограмме сетку параллельно его сторонам, то прообраз этой сетки и будет конформной сеткой в исходной области.

Расчет сетки означает нахождение координат узлов, т.е. точек пересечения координатных линий криволинейной системы координат, связанной с границами области.

Методика построения разностных сеток на сложную структуру основана на отыскании квазиконформного отображения из нескольких квадратов. Основной задачей при таком подходе является отыскание раскроя данной области, позволяющего получить достаточно хорошие разностные сетки. Подход состоит в отыскании преобразования координат $x,y\to u,v$, которое позволит осуществить квазиконформное отображение физической области на каноническую область - многоугольник, составленный из нескольких квадратов или прямоугольников.

Построение разностных сеток относится к области качественных характеристик, и поэтому очень важно уметь их отображать на объекте.

Для многих приложений существенное значение имеет модуль функции комплексного переменного $w=|f(z)|$ и его рельеф (поверхность $|w|=j(x,y)$, где $|w|$ - аппликата, восстановленная в точке $z=x+iy$. Возможность увидеть рельеф в различных проекциях и аксонометрии для сеток и линий при различных их конформных и других преобразованиях реализована в модуле VEC_Kf. Модуль также обеспечивает возможность автономной работы с известными конформными преобразованиями по принципу формирования целевых функций. Такой подход для пользователя более гибок: можно, по желанию, выбрать любую параметризацию заданной области и любое преобразование (или серию преобразований). С этих позиций и рассмотрим ряд задач - примеров различных конформных преобразований, которые могут быть использованы, например, в задачах проектирования новых форм в архитектуре.

Пример. Построить преобразование плоскости (в частности, полярной сетки координат), описываемое функцией

$$w=z^m, \qquad (1)$$

где m - некоторое заданное положительное число .

Решение задачи осуществляем по правилам вычислений комплексных функций.

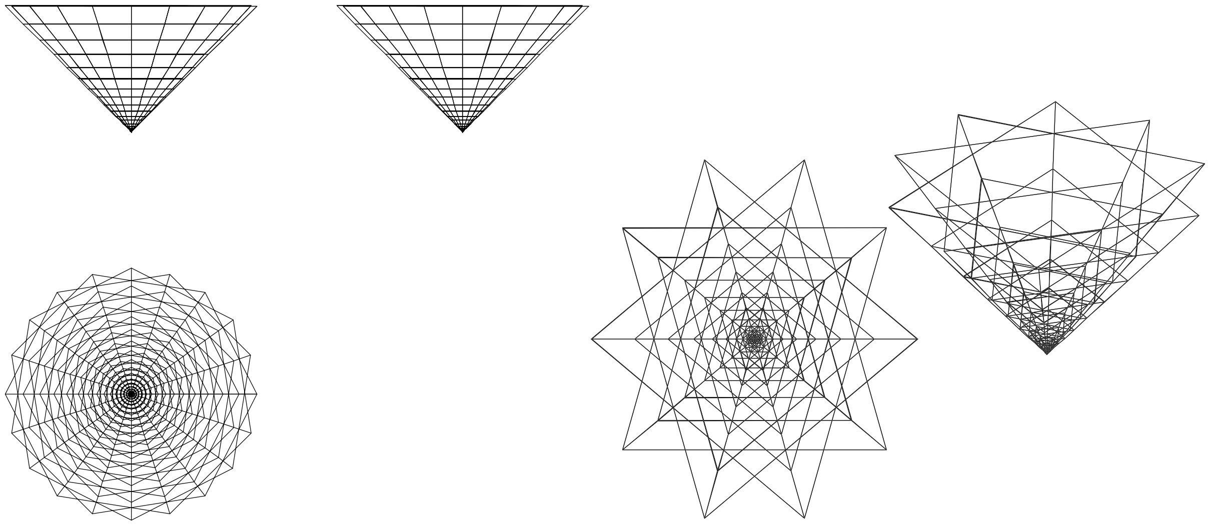

Рис 1. Преобразования вида (1) при различных значениях m, полученные в системе "Вектор"