2. НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА КАК СРЕДСТВО ВИЗУАЛИЗАЦИИ И АНАЛИЗА МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

В последнее время эффективным средством исследований и проектирования утвердились геометрическое программирование и начертательная геометрия многомерного пространства. Практическая ценность геометрического программирования заключается в том, что оно позволяет по-новому решать многие оптимизационные задачи, а начертательная геометрия многомерного пространства обеспечивает возможность наглядного представления этого процесса при числе переменных большем трех.

Графическая форма представления процесса геометрического моделирования, а в последнее время и процесса геометрического программирования, обладает весьма существенными достоинствами - наглядностью, емкостью и высокой скоростью восприятия человеком. Поэтому естественно стремление сделать наглядным и процессы моделирования и оптимизации. Однако, если моделируемые зависимости содержат более трех переменных, они не могут быть представлены в привычной системе координат трехмерного пространства $Oxyz$, и для их моделирования требуется выход за пределы этого пространства.

Существующие методы начертательной геометрии многомерного пространства можно разделить на три группы. Первую группу составляют методы, в основе которых лежит непосредственное распространение на многомерный случай координатного принципа построения на чертежах точек многомерного пространства. Ко второй группе относятся методы моделирования точек многомерного пространства векторами плоскости чертежа (двумерного пространства) или трехмерного пространства. Методы третьей группы основаны на принципе проецирования в многомерном пространстве. Эти группы методов изложены в работах [4, 42-44, 47, 57-63, 86, 113, 129, 130, 131, 135, 137, 138, 148, 153-156, 165, 168, 169, 183, 185, 189, 198, 202-208, 216, 217, 226, 227].

В настоящей работе предложен метод, относящийся к третьей группе и основанный на ортогональном проецировании в многомерном пространстве.

2.1. Общие понятия геометрии многомерного пространства

Решение геометрических задач, рассматриваемых в диссертационной работе, осуществляется в гильбертовом пространстве, элементами которого являются точки [173]. При необходимости вводятся несобственные (бесконечно удаленные) элементы пространства.

Каждое пространство n измерений, обозначаемое $\mathbf{П}^n$, кроме точек содержит линейные образы - прямые линии, плоскости и другие линейные подпространства. Линейное подпространство, размерность которого равна n-1, называется гиперплоскостью пространства $\mathbf{П}^n$.

Известно [204], что любое m-мерное пространство $\mathbf{П}^m$ определяется m +1 точками общего положения, не лежащими в пространстве, число измерений которого меньше m на единицу. Так, например, трехмерное пространство $\mathbf{П}^3$ определяется четырьмя (3+1) точками, не лежащими в одной плоскости ($\mathbf{П}^2$), четырехмерное пространство $\mathbf{П}^4$ - пятью (4 + 1) точками, не лежащими в одном трехмерном пространстве ($\mathbf{П}^3$), и т.д. Эта группа независимых точек, определяющих пространство того или иного числа измерений, называется симплексом такого пространства.

Если в пространстве $\mathbf{П}^3$ имеются два линейных подпространства $\mathbf{П}^l$ и $\mathbf{П}^{\mathrm{k}}$, то условие их принадлежности третьему подпространству определяется известными соотношениями [204]. При $l+k >= n$ линейные подпространства $\mathbf{П}^l$ и $\mathbf{П}^{\mathrm{k}}$ пересекаются по линейному же подпространству $\mathbf{П}^{\mathrm{m}}$, размерность которого рассчитывается по формуле:

$$m = l + k - n. \qquad (2.1)$$

Символически результат такого пересечения подпространства записывается в виде:

$$\mathbf{П}^l \text{ X } \mathbf{П}^{\mathrm{k}}=\mathbf{П}^{\mathrm{m}}.$$

Если же $l+k<n$, то подпространства $\mathbf{П}^l$ и $\mathbf{П}^{\mathrm{k}}$ не пересекаются, но оба принадлежат подпространству $\mathbf{П}^{\mathrm{p}}$, размерность которого определяется по формуле:

$$p=l+k+1 \qquad (2.2)$$

Символически результат такого объединения подпространств представляется в следующем виде:

$$\mathbf{П}^l \text{ X } \mathbf{П}^{\mathrm{k}}=\mathbf{П}^{\mathrm{p}}.$$

Например, в 4-мерном пространстве $\mathbf{П}^4$ две плоскости $\mathbf{П}^2$ и $\mathbf{П}^2$ при взаимном пересечении определяют линейный образ, имеющий нулевую размерность, т.е. точку, ибо по формуле (2.1) 2+2-4=0.

В 4-мерном же пространстве $\mathbf{П}^4$ две произвольно расположенные прямые $\mathbf{П}^1$ и $\mathbf{П}^1$ не пересекаются, так как 1+1 < 4. Однако согласно выражению (2.2) эти две прямые определяют трехмерное подпространство $\mathbf{П}^3$, принадлежащее пространству $\mathbf{П}^4$, ибо 1+1+1=3.

В пространстве $\mathbf{П}^n$ помимо линейных образов располагаются и нелинейные образы: кривые линии, двумерные поверхности, трехмерные поверхности и т.д. до поверхностей n - 1 измерений, которые называются гиперповерхностями $\mathbf{П}^n$.

Широко используется ориентирование объектов многомерного пространства относительно прямоугольной координатной системы, которая состоит из n взаимно перпендикулярных осей, если к ней отнесено пространство n измерений. Каждая координатная ось в этой системе координат перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в подпространстве, определяемом остальными n - 1 координатными осями. Так, например, подобно тому, как в трехмерном пространстве, отнесенном к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в координатной плоскости xy, в четырехмерном пространстве, отнесенном к системе прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3x_4$, ось Ox_4 перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в трехмерном координатном подпространстве $Ox_1x_2x_3$. Такая аналогия может быть распространена и на пространства более высоких измерений.

Рассмотрение n-мерного пространства, отнесенного к прямоугольной координатной системе, позволяет увязать аналитические формы выражения его объектов и производимые с ними геометрические операции с графическим выражением этих объектов.

2.2. Моделирование точки *n*-мерного пространства на ортогональных и аксонометрических разнесенных чертежах

Выберем в четырехмерном пространстве некоторую точку, которую обозначим A^4 (рис.2.1). Будем рассматривать эту точку отнесенной к прямоугольной координатной системе $Oxyzt$, которая состоит из четырех взаимно перпендикулярных координатных осей Ox, Oy, Oz, Ot, шести взаимно перпендикулярных координатных плоскостей *xy, xz, xt, yz, yt, zt* и из четырех взаимно перпендикулярных координатных трехмерных подпространств *xyz, xyt, yzt, xzt*. Координатные трехмерные подпространства называются также координатными гиперплоскостями.

В координатной системе *Oxyzt* каждая координатная ось перпендикулярна к каждой координатной плоскости и к каждой координатной гиперплоскости, не содержащим эту ось. Например, ось *Ot* перпендикулярна к координатной гиперплоскости *xyz* и к координатным плоскостям *xy, xz* и *xz*.

Точку A^4 будем проецировать ортогонально на координатные гиперплоскости. Такое проецирование в начертательной геометрии многомерного пространства вполне возможно, так как на основании формулы (2.1) прямая, проведенная через точку A^4, будет пересекать координатную гиперплоскость также в точке, которая может рассматриваться как проекция точки A^4 на соответствующую гиперплоскость. Если через точку A^4 провести прямую, параллельную координатной оси *Ot* или перпендикулярную координатной гиперплоскости *xyz,* и отметить точку A_{xyz} пересечения проведенной прямой с названной гиперплоскостью, то точка A_{xyz} является ортогональной *xyz* и определяется координатами по осям *Ox, Oy* и *Oz* (рис.2.1).

Положение проекции A_{xyz} в координатной гиперплоскости *xyz* определяется координатами по осям *Ox, Oy* и *Oz;* на рис.2.1,в построен параллелепипед координат этой проекции. Естественно, что наличие только проекции A_{xyz} не позволяет однозначно моделировать положение точки A^4 четырехмерного пространства, так как четвертая координата этой точки при ортогональном проецировании выродилась в точку, совпавшую с рассматриваемой проекцией.

Спроецируем точку A^4 ортогонально на координатную гиперплоскость *xzt.* Её проекцией является точка A_{xzt} (рис.2.1,б), определяемая координатами по осям *Ox, Oz* и *Ot*. Для проекции A_{xzt} на рис.2.1,в также построен параллелепипед координат, в котором четыре ребра проецирования на *xzt* совпадают с соответствующими ребрами параллелепипеда ребер проецирования на *xyz*.

Если теперь рассматривать совокупность двух проекций A_{xyz} и A_{xzt} на двух координатных гиперплоскостях, то можно заметить следующее:

прямая $A_{xyz}A_{xz}$ также перпендикулярна к той же плоскости, следовательно, точки A_{xyz} и A_{xzt} лежат на одной прямой, перпендикулярной к плоскости xz.

Таким образом, если точку четырехмерного пространства ортогонально проецировать на два взаимно перпендикулярные трехмерные подпространства, то ортогональные проекции такой точки будут лежать на одной прямой, перпендикулярной к плоскости пересечения этих гиперплоскостей. Заметим, что две ортогональные проекции однозначно моделируют точку четырехмерного пространства, так как при наличии точек A_{xyz} , A_{xzt} и A_{xz} в конструкции (рис.2.1,б) может быть построена и точка А^4. На рис.2.1,в кроме проекций A_{xyz} и A_{xzt} построены еще две ортогональные проекции A_{xyt} и A_{yzt} точки А^4 соответственно на координатных плоскостях xyt и yzt и параллелепипеды координат этих проекций. Представленная конфигурация является параллелепипедом координат точки А^4 четырехмерного пространства, называемых часто гипергранями параллелепипеда четырехмерного пространства.

2.3. Изображение линейных образов в 4-мерном пространстве

К линейным образам в 4-мерном пространстве относятся точка, прямая, плоскость, гиперплоскость (трехмерное подпространство), гипермногогранник (4-мерная фигура, ограниченная гиперплоскостями).

Точка, прямая и плоскость задаются так же, как и в трехмерном пространстве, и могут занимать как общее, так и частное положение относительно координатных гиперплоскостей и плоскостей.

Так, например, прямая может быть проецирующей на координатную гиперплоскость, т. е. проецироваться на эту гиперплоскость в точку, плоскость, если является проецирующей на координатную гиперплоскость, может проецироваться на одну из координатных плоскостей в точку и т.д.

Гиперплоскость - это трехмерное подпространство, которое может задаваться четырьмя точками, не лежащими в одной плоскости, плоскостью и точкой, тремя параллельными, тремя пересекающимися прямыми, также не лежащими в одной плоскости, двумя скрещивающимися прямыми и т.д.

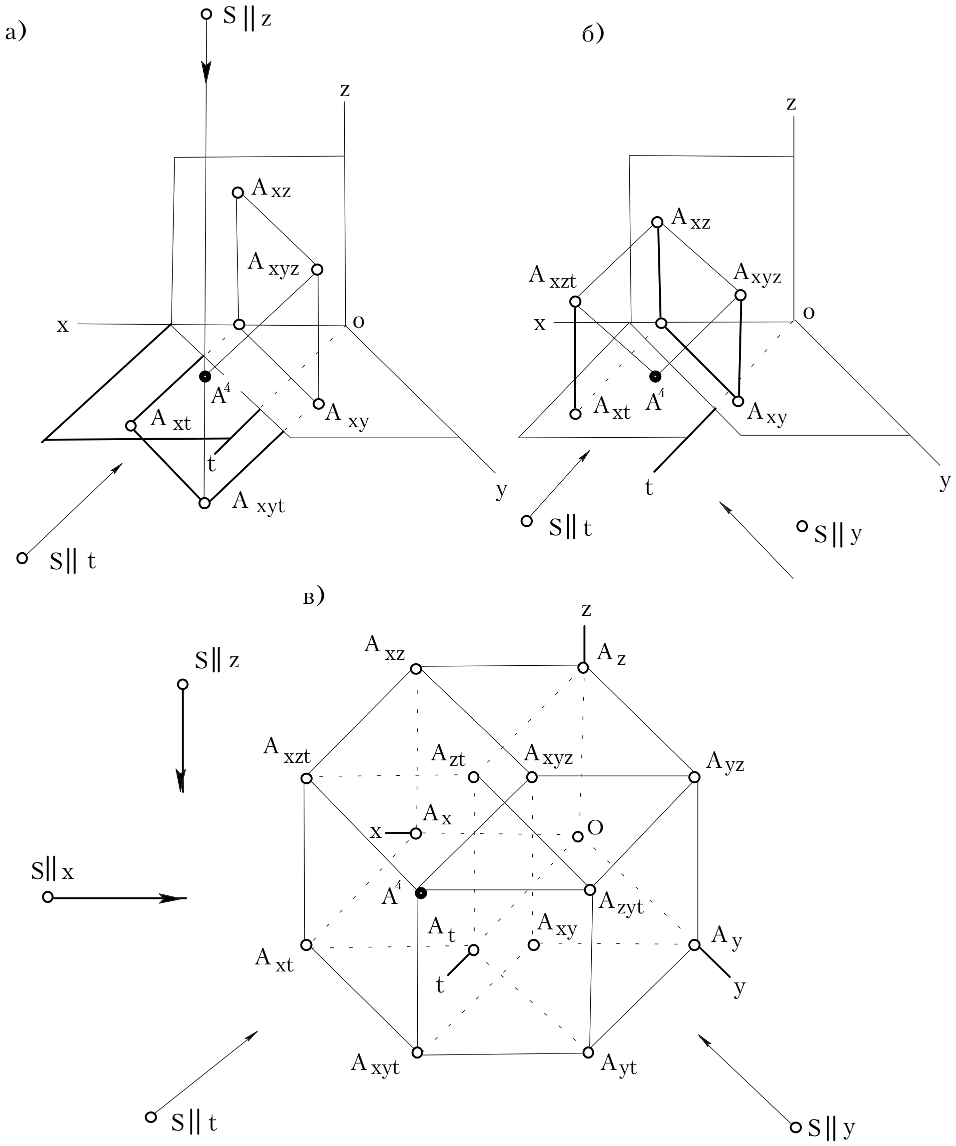

Рис.2.1. Ортогональное проецирование в E^4

Гиперплоскость может занимать общее и частное положение по отношению к координатным гиперплоскостям и плоскостям.

Гиперплоскость, расположенная перпендикулярно к координатной плоскости, проецируется на эту плоскость в виде прямой линии. Это свойство используется для решения многих позиционных и метрических задач.

Гипермногогранник - геометрическая фигура, ограниченная гиперплоскостями. На рис. 2.2 изображен гиперкуб, у которого передняя $ABCDEFMK$ и задняя $A'B'C'D'E'F'M'K'$ гиперграни расположены в гиперплоскости xyz.

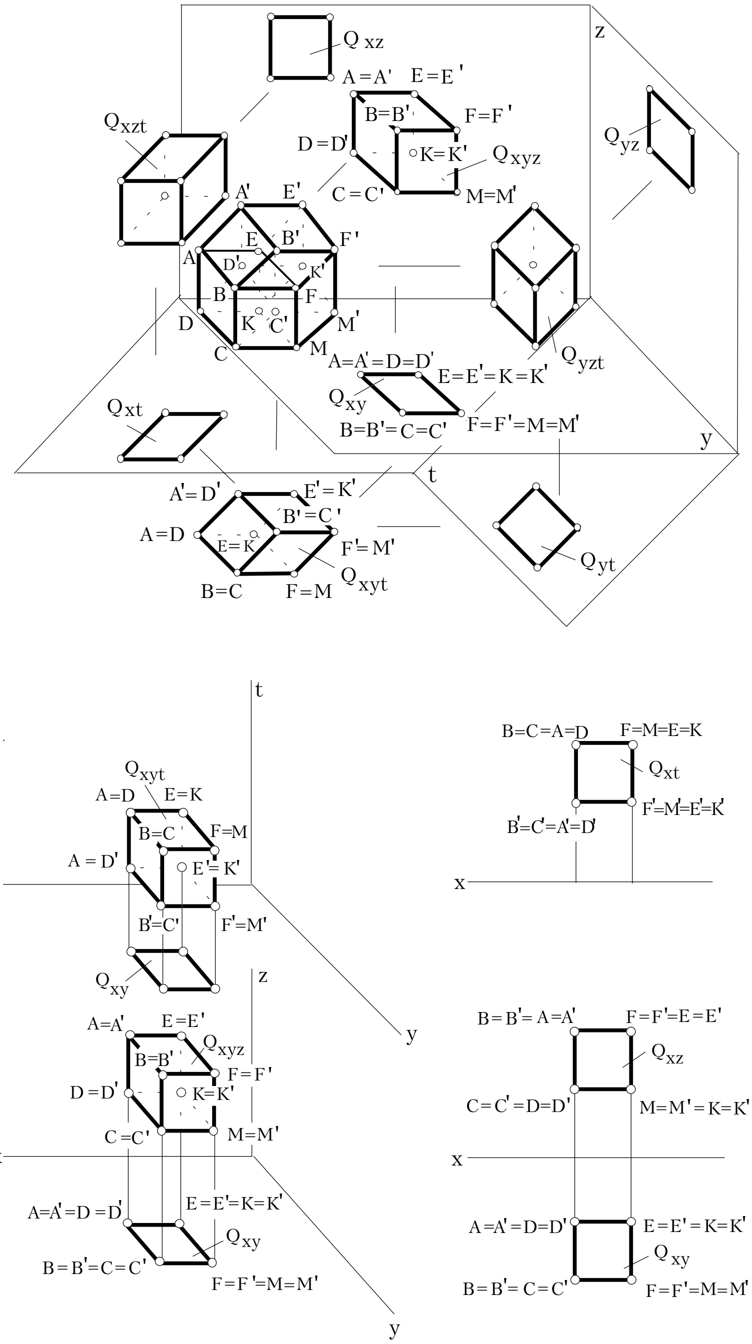

Рис.2.2. Графическое моделирование многогранных фигур 4-мерного пространства на аксонометрических и ортогональных чертежах

Построение проекции гиперкуба сводится к построению проекций отдельных точек его вершин. На примере изображения гиперкуба (рис.2.2) можно наблюдать изображение линейных образов - точки, прямой, плоскости, гиперплоскости, имеющих место в 4-мерном пространстве. Причем, многие из этих образов занимают частное положение по отно шению к координатным гиперплоскостям и плоскостям.

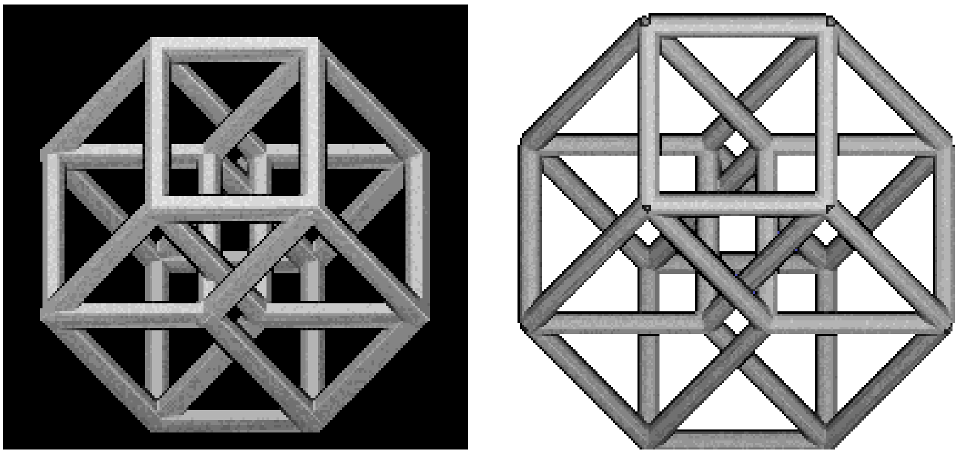

Рис.2.3. Твердотельное моделирование ребер гиперкуба в системе CG

Пример 2.1. На ортогональном чертеже построить гиперпирамиду (*АВСД*), заданную координатами точек *А*(55, 15, 20, 20), *В*(20, 5, 10, 35), *С*(35, *y*, 0, 10), *Д*(40, *y*, *z*, 25), *S*(10, 10, 30, *t*) (рис.2.4); недостающие координаты выбрать произвольно, но так, чтобы т. *С* не лежала на прямой *АВ*, точка *Д* не лежала в плоскости *АВС* и вершина гиперпирамиды *S* не лежала в гиперплоскости основания *АВСД*. При невыполнении дополнительных условий мы получим в 4-мерном пространстве трехмерную или двумерную фигуру. На рис.2.4,б-г решение задачи представлено поэтапно.

I этап

1.1. Выбрали точку *С* (ее координата по оси *Oz* равна координате конкурирующей точки на прямой *АВ*) (рис.2.4,б).

1.2. Построили грань гиперпирамиды *АВС* (соединили т. *А, В, С* прямыми линиями).

1.3. Нашли т. *Д'*, одовременно принадлежащую плоскости *АВС* и линии *А*-1.

1.4. Выбрали т. *Д* вне плоскости грани *АВС.* Координату по оси *Oz* т. *Д* выбрали больше, чем у точки *Д'*, лежащей в плоскости *АВС*.

II этап

На втором этапе соединили точки *АВСД* и определили видимость гипероснования *АВСД* формируемой гиперпирамиды *АВСДS* (рис.2.4,в).

2.1. Построили т. S', лежащую в гиперплоскости основания $ABCД$ (она лежит в проецирующей гиперплоскости 1-II-III-V на плоскость xz).

2.2. Выбрали т. S вне плоскости 1-II-III-IV и, соответственно, вне гиперплоскости основания $ABCД$.

На третьем этапе соединили прямыми вершину S с вершинами основания. Видимость ребра $AД$ на координатной плоскости xt по отношению к грани ABC определена по конкурирующим на гиперплоскости xyt точкам 1 и 2. Видимость таких точек определяется по координате z, т. е. видимой будет та точка, у которой координата по оси Oz больше. На плоскости xt видимой будет точка 2, принадлежащая ребру $AД$, и поэтому ребро $AД$ на плоскости xt будет видимым. Таким же образом определена видимость других ребер и граней гиперпирамиды $ABCДS$.

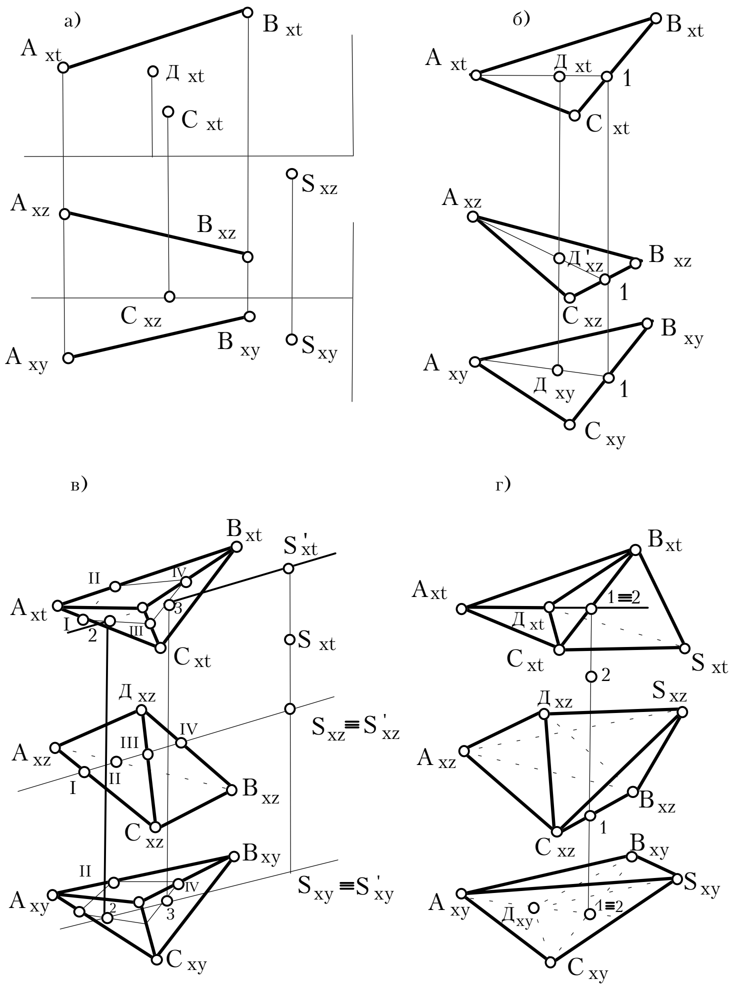

Рис.2.4. Построение многогранных фигур в 4-мерном пространстве

2.4. Взаимное положение линейных образов в 4-мерном пространстве. Решение позиционных задач

Позиционными называются задачи, в которых определяется взаимное положение различных геометрических фигур относительно друг друга. К таким задачам относятся задачи на взаимопринадлежность и на пересечение.

Пример 2.2. Перезадать линиями уровня $f,\ h,\ v$ гиперплоскость Q, заданную двугранным углом *АВСД* (рис.2.5,а).

На рис.2.5,а-г решение задачи представлено поэтапно. При этом линии уровня $f,\ h,\ v$ проводятся через точку Д.

I этап. Через т.*Д* (рис.2.5,а) проводим параллельно координатной гиперплоскости гиперплоскость уровня R, в которой находятся линии уровней f - прямой, параллельной координатной плоскости xz, и h - прямой, параллельной плоскости xy. Гиперплоскость R пересекает заданную гиперплоскость Q по плоскости в точках I-II-Д. Проекции плоскости I-II-*Д* определим на координатных плоскостях xy и xz.

II этап. В плоскости I-II-*Д* (рис.2.5,б) определяем фронталь f и горизонталь h подобно тому, как это делается в трехмерном пространстве.

III этап. Через т.*Д* (рис.2.5,в) проводим вспомогательную гиперплоскость уровня T параллельно координатной гиперплоскости. Прямая уровня V лежит в плоскости III-IV-Д пересечения вспомогательной гиперплоскости T и Q. На фронтальной плоскости xz проводим проекцию V_{xz} прямой V параллельно плоскости xt. Поскольку прямая V лежит в плоскости III-IV-Д, она должна иметь две общих точки с плоскостью III-IV-Д. Такими точками являются точка 3 и точка Д. Определяем эти точки на координатной плоскости xt и строим линию уровня V_{xt}.

IV этап. Через т.Д (рис.2.5,г) отдельно от гиперплоскости Q проводим линии уровня $f,\ h,\ V,$ которые определяют гиперплоскость Q, но уже перезаданную соответствующим образом. Перезадание гиперплоскости общего положения линиями уровня имеет важное значение для решения метрических задач и задач на перпендикулярность.

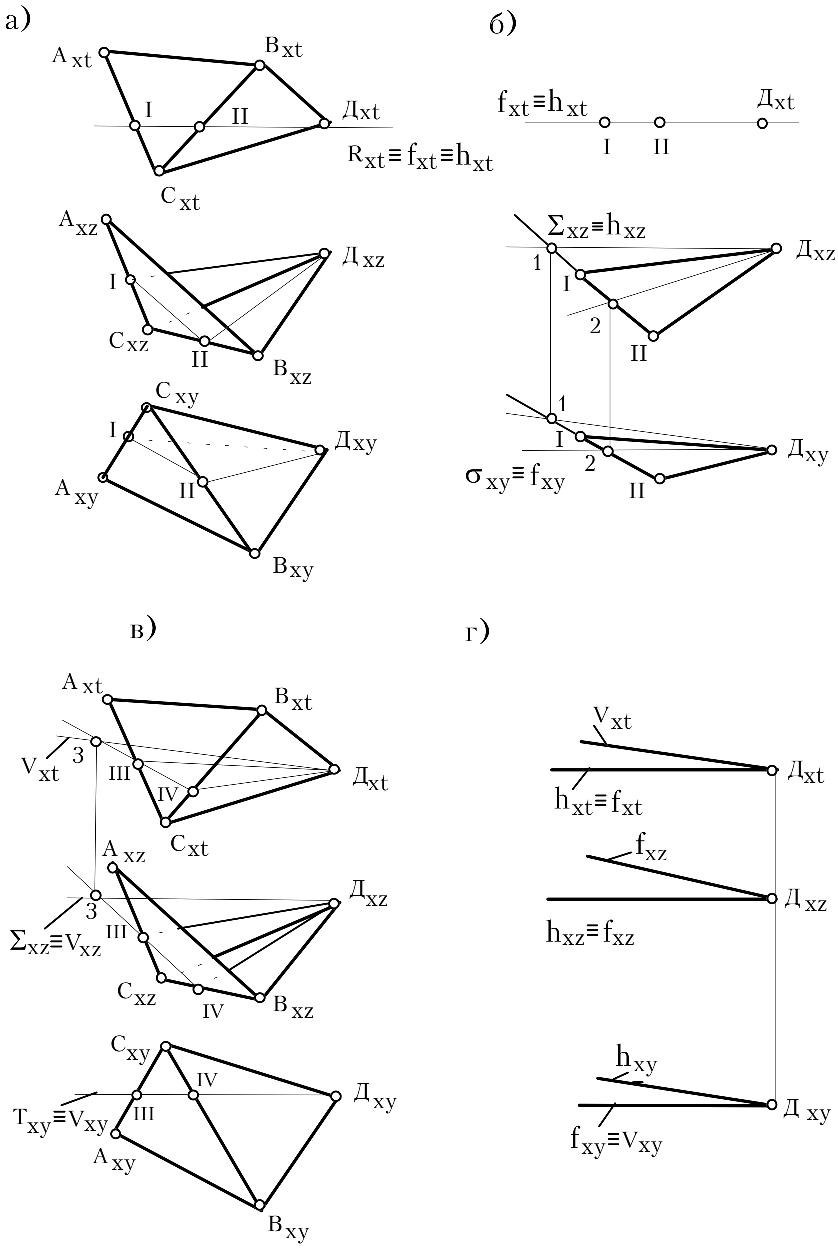

Рис.2.5. Пример перезадания гиперплоскости линиями уровня

2.5. Решение метрических задач

Решение задач позиционного и метрического характера значительно упрощается, когда геометрические фигуры имеют частное расположение относительно координатных плоскостей. Упростить решение этих задач при общем расположении геометрических фигур можно, по аналогии с начертательной геометрией трехмерного пространства, использованием преобразования комплексного чертежа.

2.5.1. Способ замены плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что одна или две основные плоскости проекций xy, xz, xt заменяются новыми плоскостями, расположенными относительно оригинала подходящим образом. На рис.2.6,а показано построение точки A на новых координатных плоскостях x_1z_1,x_1y_1, x_1t_1, x_2z_2.

Аналогично можно заменить любую из данных плоскостей или гиперплоскостей проекций на другую плоскость или гиперплоскость, перпендикулярную к незаменяемой плоскости или гиперплоскости проекций.

На рис.2.6,б в качестве примера определена натуральная величина отрезка прямой BC. Проекция $B_{x't}C_{x't'}$ прямой BC на новой координатной плоскости в новой координатной системе 4-мерного пространства $x'yz't'$ определяет натуральную величину отрезка BC.

На рис.2.6,в при помощи замены плоскостей проекций определено расстояние от точки J до прямой AB общего положения.

Прямая AB преобразована в точку на координатную гиперплоскость $x_2y_1z_2$. Отрезок JK определяет расстояние от точки J до прямой AB. Натуральная величина определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, катет у которого $K_{2z2}K_{x2z2}$ равен разности координат по оси y_1 точек K, J на координатной плоскости x_2y_1.

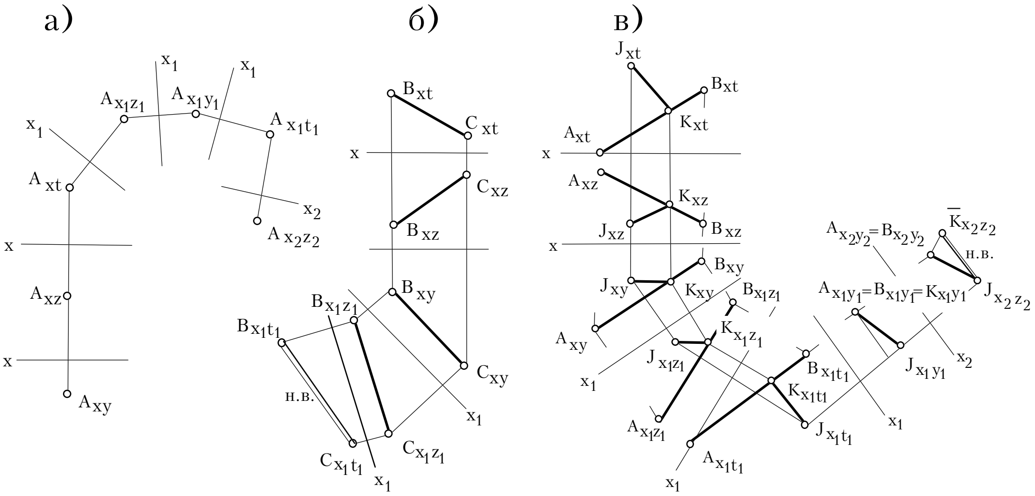

Рис.2.6. Метод замены плоскостей проекций в 4-мерном пространстве

2.5.2 Способ вращения

При этом способе преобразования плоскости и гиперплоскости проекций остаются неизменными, а изменяется положение геометрических фигур. Изменение положения оригинала достигается вращением его вокруг некоторой оси (в четырехмерном пространстве возможно вращение и вокруг плоскости). В качестве осей вращения выбираются прямые, которые проецируются (вторым проецированием в координатных подпространствах) на координатные плоскости в точку.

При выполнении вращения вокруг такой оси используются те же условия, что и в трехмерном пространстве, а именно: вращающаяся точка описывает окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Пример 2.4. Точку A повернуть вокруг оси i, будем считать конкурирующей на горизонтальную плоскость xy на угол 135° против часовой стрелки (рис. 2.7.).

Вращаясь, точка A опишет окружность в плоскости вращения, перпендикулярной к оси i (см. наглядный и ортогональный чертежи 4.2.1,а,б).

Плоскость окружности вращения параллельна плоскости xy, поэтому на эту плоскость она изображается без искажения, а на плоскостях xz и xt изображается отрезками прямых, расположенных в плоскостях вращения. Новые положения вращаемой точки A расположены на образованной окружности. На рис. 2.7, б показано положение оси i на плоскости вращения 1-2-3-4 на координатных плоскостях zt и yt.

Плоскость вращения 1-2-3-4 отображается на плоскость zt точкой.

Отрезок AO на этой же плоскости изображен в натуральную величину, т.к. расположен параллельно плоскости zt. На основании этого можно заключить, что ось i расположена перпендикулярно плоскости вращения, и наоборот.

На рис. 2.7. ось вращения построена через произвольно выбранную точку N (в профильной плоскости) и центр вращения O.

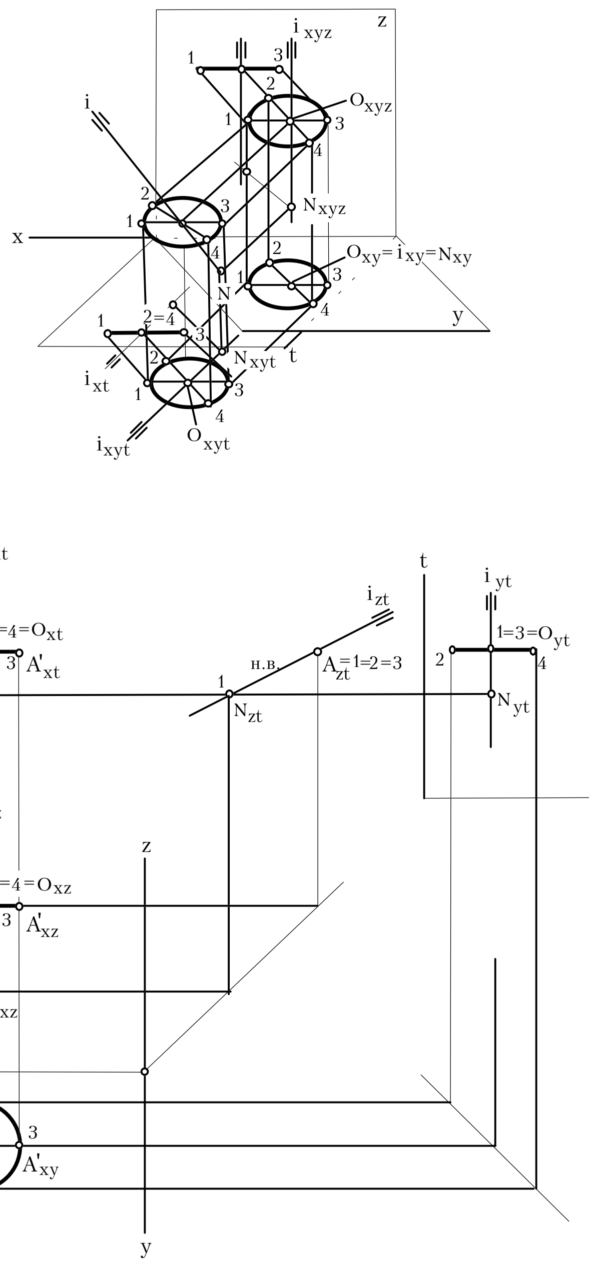

Рис.2.7. Метод вращения

2.6. Изображение нелинейных образов

Кривая линия, все точки которой не принадлежат одной гиперплоскости, называется пространственной кривой четырехмерного пространства. На рис.2.8,а кривая линия задана своими проекциями $y = f_{xy}(x),\ z = f_{xz}(x),\ t = f_{xt}(x)$.

Конкретная кривая в пространстве может быть плоской, "гиперплоской" - лежать в гиперплоскости - и пространственной кривой 4-мерного пространства.

"Гиперплоскую" кривую всегда можно расположить параллельно координатной гиперплоскости (рис.2.8,б), а плоскую кривую - параллельно какой-либо координатной плоскости (рис.2.8,в).

При перемещении в пространстве линия образует некоторую поверхность. На рис.2.8,г приведена поверхность, образованная перемещением кривой $\Psi_o(y)$ по образующей $f(x)$ в гиперплоскости xyz.

Уравнение этой поверхности можно записать, используя гиперключевой метод :

$$z(x,y) = \frac{f(x)}{f(0)}\,\psi_o[y].$$

Обозначим образованную поверхность $z = \phi_o(x,y)$.

Тогда поверхность Φ_o в четырехмерном пространстве можно представить ее проекциями:

$$z = \phi_o(x,y),\ t{=}const{=}0 \qquad (2.3)$$

Если двумерная поверхность лежит в какой-либо гиперплоскости общего положения четырехмерного пространства, то она представима своими проекциями в виде:

$$\begin{aligned} z &= \phi_{xy}(x,y) \\ t &= \phi_{xyt}(x,y) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Уравнение 2.4 определяет двумерную поверхность, заданную своими проекциями на координатных гиперплоскостях xyz, xyt. По этим двум проекциям всегда можно определить проекции этой поверхности в других координатных гиперплоскостях 4-мерного пространства.

Данный факт используется в гиперключевом методе для определения уравнения двумерной поверхности в гиперплоскости.

Если двумерную поверхность перемещать параллельно ей самой или по закону каких-либо направляющих в четырехмерном пространстве, то получим трехмерную поверхность - гиперповерхность. На рис.2.8,д изображена гиперповерхность, образованная движением двумерной поверхностиΦ_o по образующей $\mu(t)$. Уравнение такой гиперповерхности:

$$z(x,y,z) = \frac{\mu(t)}{\mu(0)}\,\phi_o(x,y).$$

На рис.2.8,д построено сечение $\Phi_1(x,y)$ гиперповерхности T

при $t=ti$.

На рис.2.8,е и 2.8,ж двумерная поверхность Φ_o и гиперповерхность T изображены на ортогональных чертежах 4-мерного пространства.

Поверхности в 4-мерном пространстве могут быть линейчатыми и нелинейчатыми. К линейчатым относятся поверхности: конические и гиперконические, цилиндрические и гиперцилиндрические и т.д.

Простейшими поверхностями вращения в 4-мерном пространстве являются известные из трехмерного пространства эллипсоид, параболоид, гиперболоид и тор, а также новые: гиперэллипсоид, гиперпараболоид, гипергиперболоид, гипертор.

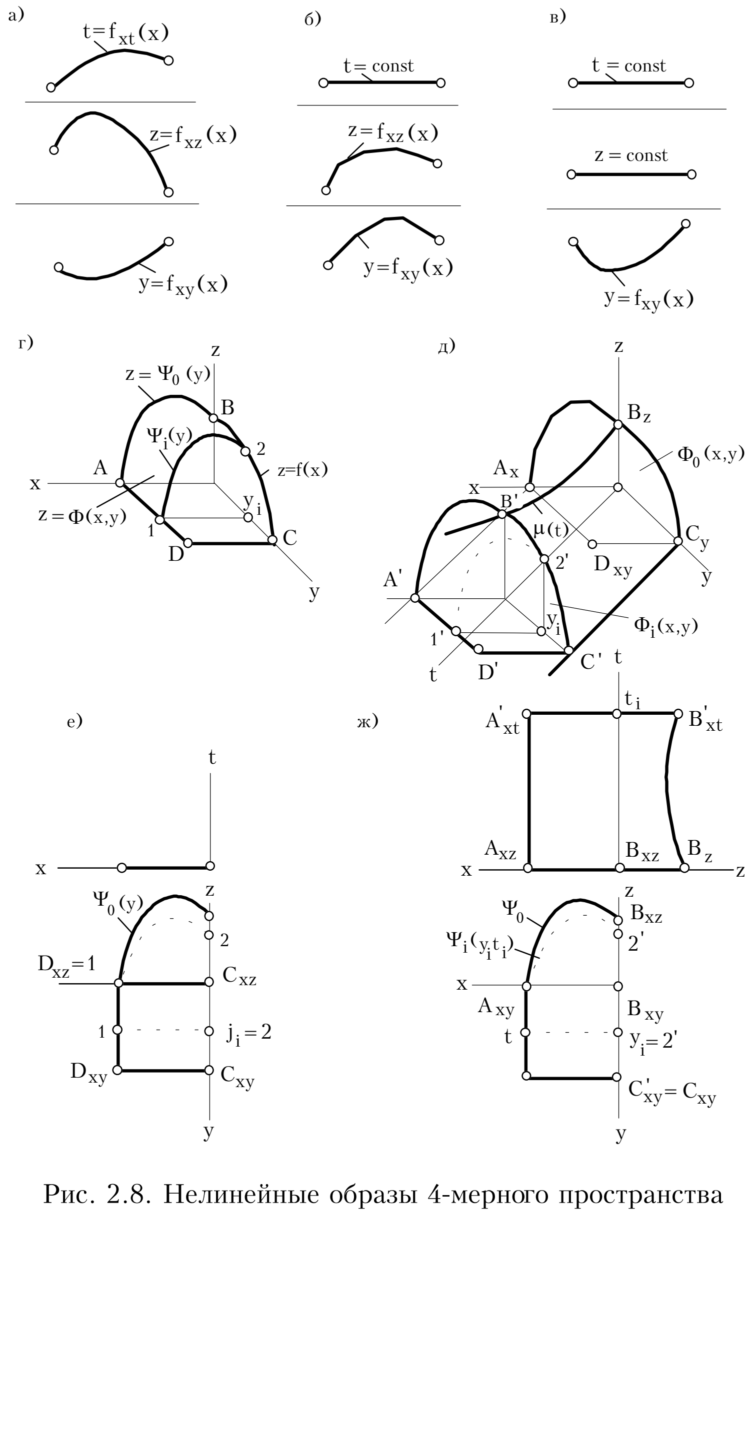

Рис. 2.8. Нелинейные образы 4-мерного пространства

2.7. Начертательная геометрия пространств более четырех измерений

Представим прямоугольную систему координат пятимерного пространства O_{xyztj} (рис.2.9,а) и отнесенную к ней точку A.

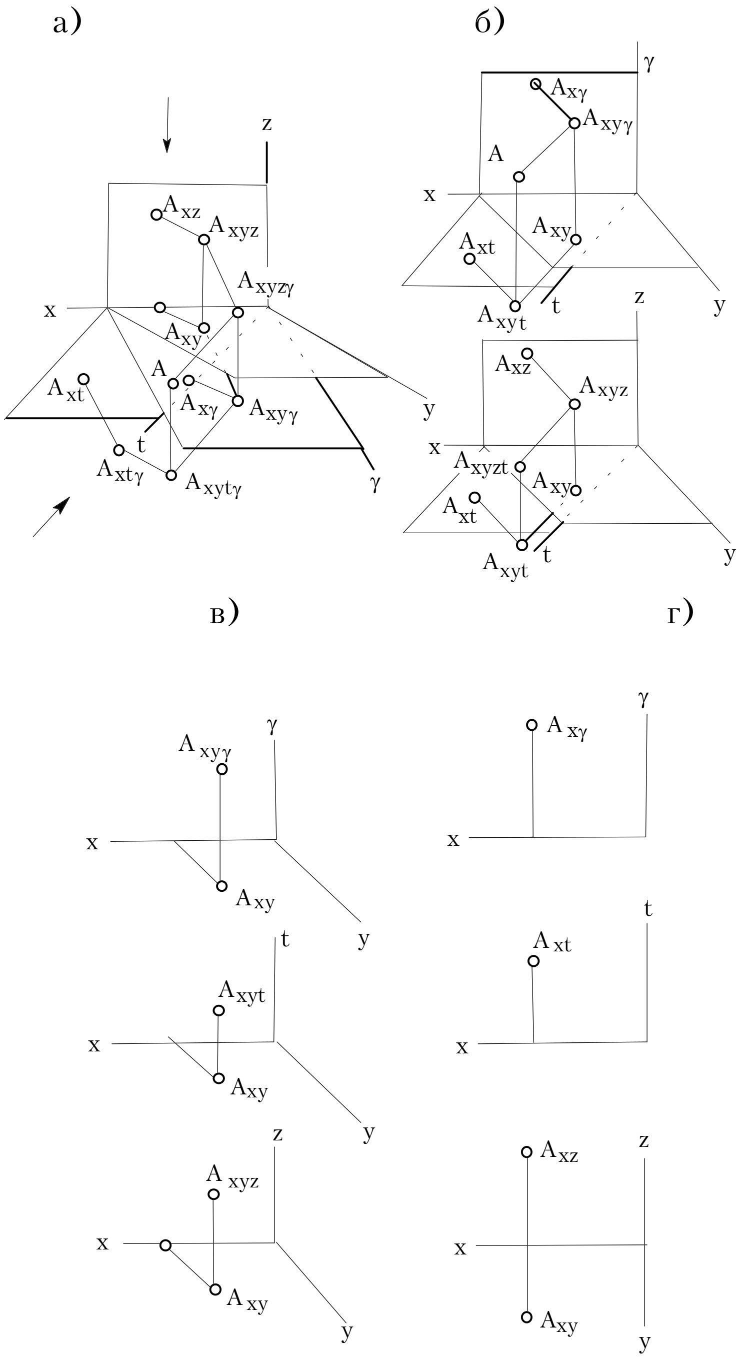

Рис. 2.9. Графическая модель пространства E^5 : а) аксонометрический чертеж, б-г) разнесенные чертежи 4-мерных и трехмерных проекций

Примем координатные 4-мерные подпространства O_{xyzj} и O_{xytj} за подпространства проекций и ортогонально спроецируем на них точку A. Точки пересечения проецирующих лучей с координатными подпространствами O_{xyzj} и O_{xytj} определяют проекции точки A_{xyzj} и A на соответствующих четырехмерных координатных подпространствах.

Вращением совместим четырехмерные и трехмерные подпространства и разнесем их так, как показано на рис. 2.9,б. В результате получим комплексные чертежи пятимерного пространства.

Проекции A_{xy}, A_{xyz}, A_{xyt}, A_{xyj} на аксонометрическом чертеже (рис.2.9,в) и проекции A_{xy}, A_{xz}, A_{xt}, A_{xj} на ортогональном чертеже определяют точку в пятимерном пространстве.

Построенные чертежи являются метрически определенными и обратимыми: на них разрешимы метрические и позиционные задачи пятимерного пространства.

По аналогии можно построить графическую модель пространства и отнесенные к ней геометрические образы с любым числом измерений, большим пяти.

При решении позиционных и метрических задач в пространстве более четырех измерений можно использовать приемы, аналогичные тем, что описаны для четырехмерных пространств.

На основании рассмотрения примеров ортогонального проецирования точек пространств различного числа измерений на подпространства низших размерностей можно сделать следующий вывод:

- точка n-мерного пространства на ортогональном разнесенном чертеже моделируется n-1 проекциями;

- точка n-мерного пространства на разнесенных аксонометрических 3-мерных чертежах моделируется n проекциями и т.д.

2.8. Методы визуального представления функций многих переменных

Известно много способов визуального представления функций одной и двух переменных. Это различного рода графики, диаграммы, изолинии и т.п.

Способов представления функций 3-х переменных значительно меньше. Обычно используются представления поверхностями равного уровня для некоторого набора значений функции и проецирование поверхностей на плоскость построения изображения .

Еще один способ построения изображений функций основан на использовании свойств заполняющей пространство кривой (ЗПК) [1]. Такую кривую можно рассматривать как предел последовательности ломаных, соединяющих специальным образом центры разбиения прямоугольной n-мерной области. С увеличением номера разбиения размер элемента разбиения уменьшается, и в предельном случае ЗПК пронизывает каждую точку области разбиения.

Заполняющей пространство кривой можно поставить в соответствие отрезок прямой. Установив такое взаимно-однозначное соответствие, легко изобразить поведение функций многих переменных в виде графика функций одной переменной.

Основанный на использовании свойств ЗПК подход к графическому представлению функций многих переменных имеет свои достоинства и недостатки.

Основное достоинство заключается в нечувствительности подхода ЗПК к числу переменных: он позволяет изображать функции произвольного числа переменных. Кроме того, некоторые способы построения ЗПК (например, П - развертка, развертка Гильберта и развертка Пеано [1]) сохраняют близость точек: близкорасположенные в n-мерном пространстве точки находятся недалеко друг от друга на заполняющей пространство кривой. Это свойство позволяет по виду графика функции одной переменной реконструировать с помощью ЭВМ значения функции многих переменных в некоторой окрестности любой точки определения функции.

Представляя поведение функции в некоторой окрестности, метод ЗПК не раскрывает изменения значений функции в зависимости от той или иной переменной. Кроме того, по графику функции одной переменной, представляющей с помощью ЗПК функцию многих переменных, невозможно визуально определить координаты интересующей точки в многомерном пространстве. Оба указанных недостатка значительно сужает область применения основанного на ЗПК метода, что снижает его практическую ценность. Невозможность разрешения проблемы изображения массивов многих измерений через массивы меньших измерений утверждается многими исследованиями и поэтому решение этой проблемы считается перспектитвным.

В задачах оптимизации иногда возможен анализ целевой функции на одной ортогональной проекции, включающей ординату этой функции. Следовательно, для изображения такой целевой функции необходим также расчет всего массива точек (количество точек не меняется), но ее размерность можно снизить до двух при изображении каждой точки на одной проекции. Например, при изображении трехмерного объекта на экране дисплея МГД система "Вектор" автоматически пересчитывает все трехмерные точки в двумерные и по ним строит плоское изображение.

В качестве другого способа визуального представления (или в дополнение к предыдущему подходу) можно предложить метод так называемых доменов. Известно, что основной проблемой при обработке графической информации является ограниченность возможностей графических систем по обработке больших массивов. Так, в системе "Вектор" в настоящее время размерность моделируемого пространства ограничена пятью измерениями. В то же время в системе практически нет ограничений на число пятимерных изображений, которые можно последовательно вызывать (без хранения их в оперативной памяти) и накладывать на предыдущее изображение. С помощью таких действий можно сформировать на ортогональной или аксонометрической проекции изображение неограниченного по размерности объекта. Недостатком описываемого подхода является невозможность построения с помощью базовых возможностей системы изолиний ЦФ больших размерностей. Для этих целей необходим инструмент построения изолиний на стадии расчета ЦФ и последующей передачи ее (порциями допустимой размерности) в графическую систему.

2.9. Геометрическая компьютерная четырехмерная модель

Принцип разнесенных ортогональных и аксонометрических чертежей многомерного пространства легко реализуется и в компьютерном варианте представления многомерных фигур.

Для трехмерного моделирования в системе "Вектор" реализована следующая схема.

а) б) в)

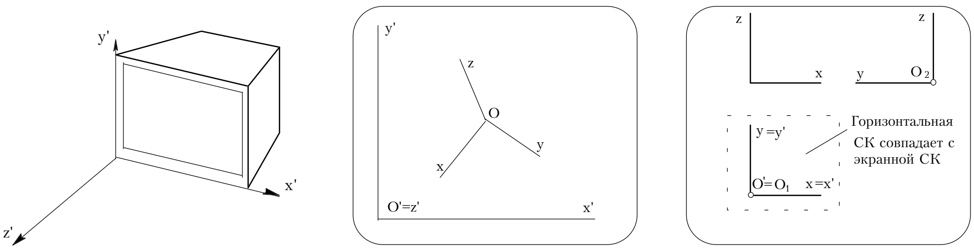

Рис.2.10. Трехмерное моделирование в системе "Вектор"

Плоскость экрана (рис.2.10,а) дисплея принята за координатную двумерную плоскость $x'y'$: горизонтальная ось $O'x'$ имеет положительное направление слева направо, вертикальная ось $O'y$ имеет положительное направление снизу вверх. Ось $O'z'$ направлена из начала координат перпендикулярно плоскости $x'y'$. При этом координату z' можно задавать вещественными ее значениями с помощью джойстика (движение джойстика к нам (кнопка "+") или от нас (кнопка "-")) или с помощью вещественных переменных x,y,z,s. Начало мировой системы координат при этом можно задавать в произвольной точке экрана, масштаб выбирается непосредственно операцией задания масштаба или диапазоном, например, по оси x. Изображения объекта формируются относительно мировой (экранной) системы координат или в системе координат пользователя: ортогональных (горизонтально-фронтальной, фронтально-профильной см. рис.1.4) или аксонометрических. Местная система координат $Oxyz$ (рис.2.10,б) задается точкой привязки, в которую помещается начало координат т.O, вектором нормали оси z и углом поворота плоскости xy вокруг оси z. Такой принцип задания местной системы координат позволяет задавать в любом месте экрана любую проекцию моделируемого объекта. При этом различий в заданиях ортогональной и аксонометрической проекций нет: все зависит от того, как задано направление оси z, на какой угол и куда повернута плоскость xy. С помощью этих действий на экране дисплея можно задать стандартные ортогональную и аксонометрическую проекции, а при необходимости и другие проекции.

Математический принцип формирования вышеописанных преобразований является стандартным и описывается единой матрицей сдвига, поворота и определения новых координат положения относительно мировой (экранной) системы координат.

Для моделирования 4-мерной системы координат поступаем по той же схеме.

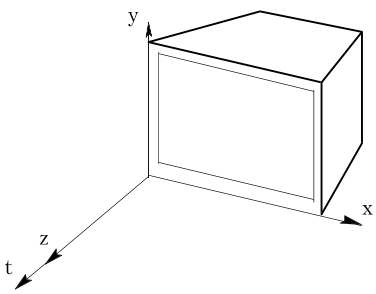

Рис.2.11. Экранная модель 4-мерного пространства

Экранную систему координат 4-мерного пространства выберем в виде чертежа Радищева [169]: четвертая ось t совпадает с осью z и направлена от экрана (рис.2.11).

Ввод координат точек 4-мерного пространства может осуществляться (рис.2.12) для координат x,y,z в позициях 1, 2, 3 джойстиком, в позиции 4 - вещественным числом или через вещественные переменные x,y,z,s во всех 1-4 позициях.

	1	2	3	4
2 - Начало =	0000.0	00000.0	00000.0	_0000.0

Рис.2.12.

При моделировании изображений многомерных фигур 4-мерного пространства ортогональная система координат задается в виде четырех взаимно перпендикулярных прямых, четырех трехмерных координатных подпространств и шести взаимно перпендикулярных двумерных плоскостей. Для решения тех или иных задач часто достаточны изображения объекта по отношению к этим плоскостям проекций. Кроме того, изображение можно формировать как 4-мерное аксонометрическое, когда все оси 4-мерного пространства видны. В последнем случае для 4-мерного пространства справедлива известная формула Польке: любые четыре отрезка прямых могут быть приняты за оси 4-мерного пространства. При построениях на экране дисплея систему координат 4-мерного пространства относим к мировой (экранной-Радищева) системе координат, и уже в этой системе координат задаем точку привязки, векторы направления осей z и t и угол поворота плоскости xy вокруг осей z и t. В этом случае теорема Польке формулируется так: "в трехмерном пространстве четыре отрезка прямых, выходящих из одной точки, могут быть приняты за оси 4-мерного пространства" (рис.2.13).

Определив таким образом систему координат 4-мерного пространства, можно получить любые стандартные ортогональные и аксонометрические проекции.

В модулях Vec_Gip и Vec_Opt системы "Вектор" реализовано автоматическое задание ортогональных двумерных (6 проекций) и трехмерных (4 проекции) проекций 4-мерного пространства. Причем все 6 положений (рис.2.14) ортогональных проекций определяются заданием начала систем координат на yz и zt проекциях. Так же, как и в случае с трехмерным пространством, пользователь может получить любую проекцию 4-мерной фигуры с помощью описаных выше операций.

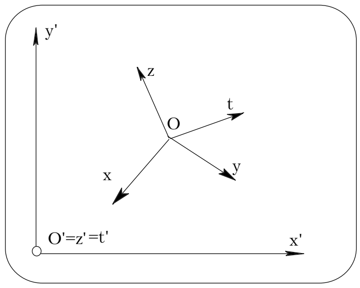

Рис. 2.13. Формирование системы координат 4-мерного изображения

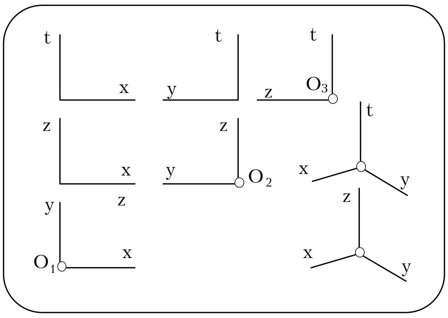

Рис.2.14. Изображение осей стандартных проекций 4-мерного пространства

В модуле Vec_Gip системы "Вектор" реализованы возможности моделирования многомерных фигур и их преобразований на комплексных и аксонометрических чертежах, передачи структуры таких объектов в другие системы для расчетов (модуль Vec_Calc системы "Вектор") или воспроизведения их в реалистическом виде (система CG).

Модуль Vec_Gip также выполняет:

задание линий общего положения:

- отрезка прямой и многоугольника,
- квадратично-рациональной кривой,
- кубично-рациональной кривой,
- сплайн- Фергюсона кривой;

задание двумерной поверхности:

- косой плоскости,
- рационально-квадратичной поверхности,
- рационально-кубичной поверхности,
- поверхности сплайн-Фергюсона;

задание 3-мерных объектов:

- гиперкосой плоскости,
- рационально-квадратичной гиперповерхности,
- рационально-кубичной гиперповерхности,
- гиперповерхности сплайн-Фергюсона;

задание 4-мерных объектов:

- гипермногогранника,
- 4-мерная "косая плоскость",
- 4-мерный рационально-квадратичный объект и т.д.

Все моделируемые объекты можно изображать в аксонометрической проекции, задавая в состоянии "Аксонометрия " следующие параметры:

- точку привязки начала системы координат,
- вектор оси z,
- вектор Оси t,
- угол вращения плоскости XOY вокруг оси $z(t)$.

В состоянии "стандартные аксонометрические проекции" обеспечивается возможность автоматического получения любой из шести проекций объекта на плоскость экрана и любой из четырех с/без вторичной проекцией изометрическое и/или димметрическое изображения объекта.

Поверхности и гиперповерхности в модуле задаются только массивами узловых (каркасных) и характеристических точек. Так, например, задание двумерной поверхности сводится к последовательному заданию точек линий контура, характеристических точек и визуализации генерируемого объекта.

Трехмерный объект также задается массивом точек: восемь точек вершин объекта, по две точки на линии контура (в случае их задания по закону Безье) и по четыре характеристических точки внутри граней (в случае их задания по закону Безье). С помощью переходов из одного состояния в другое система запоминает признаки, по которым формируется ребро и объект. Грани и трехмерный объект формируются по одному закону. В состоянии генерирования трехмерного объекта можно получать любое сечение по u,v,t и каркас сечений при задаваемом количестве сечений.

Практическая значимость данного модуля состоит в том, что в модуле предусмотрена возможность численного моделирования и визуализации функции более трех аргументов. Так, например, в задачах теории катастроф при исследовании остойчивости судна и поведения судовых систем жизнеобеспечения важно уметь моделировать и оптимизировать процессы с большим количеством переменных параметров.

Основные положения геометрии 4-х и более измерений с позиций традиционной начертательной геометрии изложены в прил. 3. Определяющими для расчетно-графического программирования в начертательной геометрии многомерных пространств будем считать те положения, которые в наибольшей степени используются в следующих задачах:

1) проектирования поверхностей и их оптимизации применительно к судовым техническим формам;

2) структурно-клеточного моделирования (дискретизации) линий, поверхностей, тел и объемов более высоких измерений;

3) геометрического программирования линейной и нелинейной оптимизации и выпуклого анализа;

4) решения и анализа задач пп. 1-3 на экране графического дисплея и во внутреннем представлении ЭВМ.

В главах 3-5 попытаемся провести их анализ с позиций вышеперечисленных задач.

Выводы по второй главе

1. Описан новый принцип графического моделирования многомерного пространства - разнесенный аксонометрический и ортогональный чертеж.

2. Исследованы вопросы построения изображений линейных и нелинейных образов многомерных пространств.

3. Предложен ряд способов преобразования чертежей для решения позиционных и метрических задач, в частности - способ проецирования по следу плоскости для задач линейного программирования (см. гл.4).

4. Приведены решения позиционных и метрических задач методом графочисленной оптимизации, а также проектирования поверхностей и тел на основе гиперключевого метода. Более подробное исследование разнесенных ортогональных и аксонометрических изображений многомерных фигур и решение с ними задач позиционного и метрического характера даны в прил.3.

5. Проведен анализ методов обработки и визуализации массивов большой размерности.Показано, что в задачах оптимизации с помощью известных методов декомпозиции нельзя свести анализ таких массивов к более простому анализу массивов меньшей размерности. Однако использование предложенной графической модели многомерного пространства позволяет осуществлять изображение многомерных массивов последовательным (без хранения в оперативной памяти машины) наложением изображений друг на друга, что практически обеспечивает изображение неограниченного по размерности массива.

6. Предложена компьютерная реализация многомерного моделирования пространств и решения позиционных и метрических задач в созданных для этих целей модулях Vec_Gip и Vec_Opt системы "Вектор". Реализованные в этих модулях методы преобразования многомерной системы координат позволяют не только визуализировать многомерные фигуры в различных проекциях, но и выбрать нужное направления проецирование на экран дисплея. Так, например, проецирование по следу гиперплоскости позволяет автоматически преобразовать гиперплоскость в частное проецирущее положение, что является удобным средством графического решения задач линейного программирования (см. рис. гл.4).

7. Разработаны и реализованы в системе "Вектор" различные методы задания многомерных образов линейной и нелинейной параметризации как основного инструмента структуризации ЦФ и ее области ограничений.

8. Приведены способы проектирования трехмерных форм на основе гиперсечений объекта (ЦФ) в четырехмерном пространстве, заданнных в трехмерном пространстве с помощью неявной функции.

9. Показана возможность интерпретации построения области Парето, характерного для задач многокритериальной оптимизации, как генерирования геометрической формы многомерного пространства. Базовый вариант системы "Вектор" позволяет строить области Парето на основе линейной или нелинейной параметризации их весовых функций.